ALGUNAS ESTIMACIONES DEL COEFICIENTE DE HURST PARA EL IGPA CHILENO

Karla Soria B.
Sergio Zúñiga J.[1]

1. Introducción

La hipótesis de fractalidad (HF) de la naturaleza (Mandelbrot, 1982) implica "auto-similaridad", en el sentido de que las partes replican en una escala menor al total. La fractalidad podrá ser determinística (tal como el triángulo de Sierpinski y el copo de nieve de Koch[2]) o estocástica (por ejemplo las ramas de arboles, las que crecen de acuerdo a una escala fractal, la costa de Bretaña, y en principio, las series temporales de rendimientos accionarios).

Si la HF es correcta, entonces los ciclos naturales y económicos deben tener una "memoria" de largo plazo (unos 10 ó 15 años), mucho mayor de las que normalmente detectan los modelos autorregresivos, AR(n). Si es posible detectar el comportamiento de tales ciclos, se tendrían importantes implicancias en el caso, por ejemplo de la administración de portafolios financieros, por cuanto sería posible predecirlos, y de esta manera obtener beneficios anormales. Naturalmente la HF de los mercados financieros se antepone a la tradicional hipótesis de eficiencia de mercados (Fama, 1970), base de la mayor parte de la teoría financiera actual.

La metodología que a continuación desarrollamos debe su nombre al hidrólogo H. Hurst, quien entre los años 50 y 60 estudió cómo la capacidad de reserva de las represas del río Nilo debía fluctuar a través del tiempo, donde el influjo de agua de las lluvias seguiría un comportamiento de tipo random walk. Hurst extendió posteriormente su estudio a otros fenómenos naturales tales como: descargas de ríos, niveles de ríos y lagos, temperaturas y presiones atmosféricas, números de puestas de sol, números de anillos en los árboles, etc.

---

[1] Los autores son Académicos de la Escuela de Ing. Comercial de la U. Católica del Norte . Coquimbo.
[2] Ambos casos descritos en Peters (1991)

Recientemente (1989) Edgar Peters efectuó estimaciones similares para series de retornos mensuales del S&P 500 y para retornos de bonos del tesoro de los EEUU con similares resultados a los obtenidos por Hurst.

Nuestro objetivo es efectuar un estudio similar para una serie de datos del Indice General de Precios de las Acciones de la bolsa de comercio de Santiago de Chile, exponer en detalle la metodología y discutir los resultados obtenidos.

2. El Exponente de Hurst

Si asumimos que el retorno diario observado en un título bursátil es :

(i) una variable aleatoria independiente y

(ii) con igual varianza cada día, entonces podemos escribir la varianza semanal simplemente como la suma de las varianzas diarias, es decir:

$$\sigma^2 (lu + ma + mi + ju + vi) = 5\sigma^2 (lu)$$

Ecuación 1

donde lu, ma,... está referido a los días lunes, martes,..., σ^2 es la varianza diaria. Esto es así dado que asumida independencia, todas las covarianzas correspondientes serán nulas, y además dado que los rendimientos son todos iguales (lu=ma=...), podemos factorizar por la varianza del día lunes, por ejemplo.

La Ecuación 1 nos muestra una relación lineal entre el riesgo de diferentes periodos de tiempo, de donde se deduce la regla "$T^{1/2}$", bajo la cual podemos transformar el riesgo diario (medido como la desviacion estándar, σ) a riesgo semanal simplemente multiplicando por la raíz cuadrada de T=5 días, de acuerdo a la Ecuación 2[3]. Así, cumpliéndose los 2 supuestos básicos podremos aplicar cualquier transformación de tiempo conociendo el valor de T apropiado, y elevando T a un número que adquirirá gran significado: 1/2.

$$\sigma(\mathit{periodo}\ 1) = \sigma(\mathit{periodo}\ 2)\ T^{1/2}$$

Ecuación 2

En adelante mantendremos el supuesto (ii) de homocedasticidad (igual varianza) y en cambio nos concentraremos en un eventual levantamiento del supuesto

---

[3] A. Einstein en 1908 habría estimado que la distancia que cubre una partícula aleatoria aumenta con la raiz cuadrada del tiempo de medición, siendo ésta una aplicación directa de la regla.

(i). Si por algún motivo los rendimientos, por ejemplo diarios están correlacionados con los rendimientos semanales, ya sea en un sentido positivo o negativo, implicará que las covarianzas interdiarias son no nulas deduciéndose que el exponente de la Ecuación 2 sea distinto de 0,5. Si por ejemplo la correlación es positiva entonces el término de lado izquierdo en la Ecuación 2 será mayor que en el caso de independencia, luego para mantener la igualdad el exponente de T debe ser mayor que 0,5, es decir debemos asociar correlación positiva con un exponente mayor que 0.5, independencia con un exponente igual a 0.5 y análogamente correlación negativa con un exponente menor que 0.5. En realidad puede demostrarse que el valor de este exponente debe estar entre 0 y 1. En consecuencia el exponente de la Ecuación 2 es una consecuencia directa de los supuestos previos de homocedasticidad e independencia.

Una prueba sencilla del grado de cumplimento del supuesto de independencia sobre una cierta serie de datos históricos consiste en estimar empíricamente si el coeficiente anterior es 0.5 o no. Para esto se plantea una relación aún más general que la referida en la Ecuación 2 en las que se incorporan dos nuevos coeficientes a ser estimados. La **Ecuación 3** relaciona la variabilidad de dos series de datos x e y, con el periodo de tiempo que las vincula. El coeficiente a tiene un valor esperado de 1 y el coeficiente H un valor esperado de 0.5.

$$\sigma(y) = a(T)^H \sigma(x)$$

Ecuación 3

Para la estimación econométrica de esta ecuación, reemplazamos x por otra medida de dispersión llamada el rango (R). Dividimos ambos lados de la igualdad por $\sigma(x)$ a fin de estandarizar los datos. A la serie de datos $R/\sigma(x)$ se le ha denominado rango reescalado (R/S), lo que da un nombre alternativo a este tipo de estudios: Rescaled Range Analysis. Para la estimación econométrica de la **Ecuación 3** sólo basta linealizar aplicando logaritmos y proceder al ajuste vía mínimos cuadrados para obtener una proxy de H (también llamado coeficiente de Hurst) que corresponderá a la pendiente de la recta estimada. El modelo a estimar es:

$$LN(R/\sigma) = LN(a) + H\,LN(N) + \varepsilon$$

Ecuación 4

donde:
R/σ=rango reescalado cuyo procedimiento de estimación describiremos a continuación
H=coeficiente de Hurst
σ=desviación estandar de las observaciones
ε=los residuos del modelo

3. Los Datos y la Metodología

Usamos la serie de variaciones diarias del Indice General de Precios de las Acciones de la bolsa de Comercio de Santiago para el periodo enero 1992 a diciembre de 1991 (N=2400 datos). El procedimiento seguido es descrito a continuación:

Paso 1: Se particiona la muestra total en submuestras de similar tamaño, n=2400/i, donde i=1 (inicialmente trabajamos con la muestra total, es decir, para i=1 tenemos que n=N). Para cada partición de tamaño n se calculó la media y desviación estándar.

Paso 2: Calculamos las diferencias y las diferencias acumuladas de cada observación con respecto a la media de su grupo respectivo. Identificamos la máxima y la mínima diferencia acumulada de cada grupo. La diferencia (resta) de estos valores extremos es llamada el **rango** de cada partición.

Paso 3: Dividimos el rango por la desviación estándar para obtener el rango reescalado (R/S) de cada partición. El promedio de tales rangos será el valor de (R/S) a usar, y que junto con el tamaño de las particiones (n), constituye un par de datos para la regresión.

Paso 4: Hacemos i=2 y volvemos al Paso 1. Repetimos este ciclo para i=3, 4, 6, 8, 12, 18, 27, 40, 53, 80 y 160, para obtener 13 pares de datos como los descritos en el paso 3[4].

[4] Note que, por ejemplo, la última partición de la muestra consideró 160 grupos de 15 observaciones cada uno.

4. Los Resultados comparados

La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos al seguir el procedimiento anteriormente descrito y de aplicar el logaritmo natural.

Tabla 1 : Análisis R/S para las Variaciones Diarias del IGPA 1982 - 1991

n	R/S	LN (n)	LN (R/S)
2400	140,520	7,783	4,945
1200	78,294	7,090	4,360
800	53,498	6,685	3,980
600	49,145	6,397	3,895
400	37,543	5,991	3,625
300	33,205	5,704	3,503
200	25,465	5,298	3,237
135	21,115	4,905	3,050
90	14,718	4,500	2,689
60	10,969	4,094	2,395
45	9,448	3,807	2,246
30	7,140	3,401	1,966
15	4,589	2,708	1,524

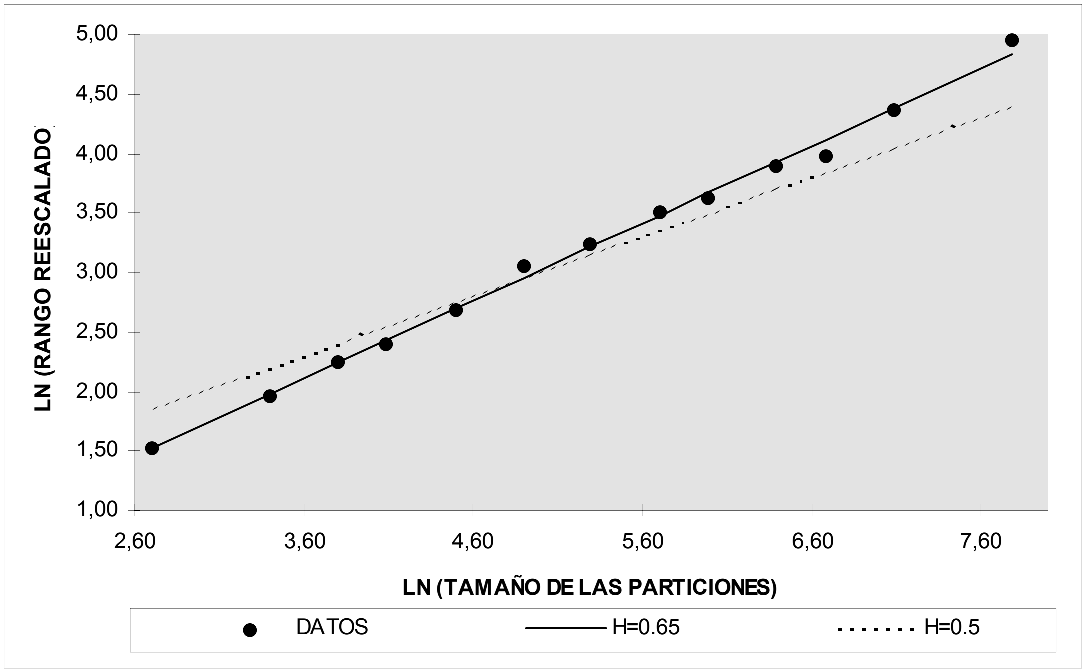
En base a la Ecuación 4 corremos una regresión lineal simple para las últimas dos columnas de datos de la tabla anterior. Los resultados se muestran en la Tabla 2

Tabla 2: Resultados de la Regresión

H Estimado	**0,6525**
Standard Error de H	0,0122
R Cuadrado	0,9962
Constante	-0,2456
Standard Error de R/S	0,0645

El Gráfico 1 compara el ajuste de la regresión con los datos reales y la recta que se obtendría con pendiente 0,5 (H=0,5), donde se aprecia claramente que la magnitud de la diferencia del coeficiente que hemos estimado respecto del caso de independencia en las observaciones es hacia una correlación positiva.

Gráfico 1 : Análisis R/S para el IGPA 1982-1991

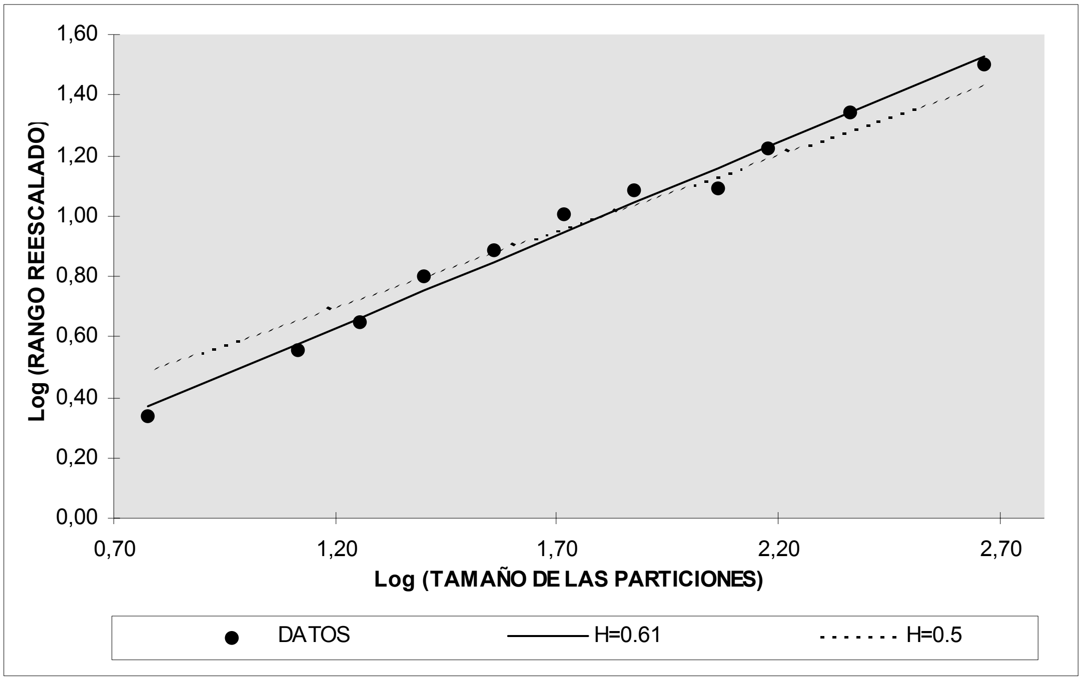


A efectos de comparación mostramos en la Tabla 3 y el Gráfico 2 los resultados obtenidos por Peters (1989).

Tabla 3: Análisis de R/S para el S&P 500 Peters (1989)

n	R/S	LOG (n)	LOG (R/S)
463	31,877	2,666	1,503
230	22,081	2,362	1,344
150	16,795	2,176	1,225
116	12,247	2,064	1,088
75	12,182	1,875	1,086
52	10,121	1,716	1,005
36	7,689	1,556	0,886
25	6,296	1,398	0,799
18	4,454	1,255	0,649
13	3,580	1,114	0,554
6	2,168	0,778	0,336

Gráfico 2 : Análisis R/S para S&P 500
1-50 - 6-88



4. Conclusiones

Nuestros resultados muestran un coeficiente H de 0,65, similar a los resultados obtenidos por Peters para el caso norteamericano y a los resultados de Hurst para varios fenómenos naturales.

Si la hipótesis de fractalidad es correcta y se cumplen además los supuestos de homocedasticidad, entonces algún grado de capacidad de predicción para los retornos accionarios sería posible de efectuar, lo que sería útil para efectos de desarrollar estrategias de inversión que pudieran derrotar al mercado en alguna medida. Aún más, este resultado mostraría de un modo adicional que los rendimientos accionarios no siguen un comportamiento de random walk puro sino sesgado.

A pesar de lo anterior, poco podemos decir acerca de como debe desarrollarse la estrategia ganadora, ya que si bien existiría una correlación promedio positiva de largo plazo, esta correlación podría ser tan ruidosa (poco significativa) como poco práctica.

5. Referencias

Black, Fisher. "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing". The Journal of Business, julio 1972, págs. 444-455.

Black, Jensen y Scholes. "The capital asset pricing model: Some empirical tests". Studies in the theory of capital markets (1972). Praeger, New York.

Fama, Eugene y MacBeth, James. "Risk, return and equilibrium: Some empirical tests". Journal of Political Economy 71 (1973), págs 607-636.

Fama, Eugene y MacBeth, James. "Risk, return and equilibrium: Some empirical tests". Journal of Political Economy 71 (1973), págs 607-636.

Fama, Eugene. "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work". Journal of Finance, mayo (1970).

Feder, J. "Fractals". New York: Plenum Press (1988)

Hurst, H.E. "Long-terms Storage of Reservoirs". Transactions of the American Society of Civil Engineers 116, (1951).

Lintner, James. "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in Stocks Portfolios and Capital Budgets". Review of Economics and Statistics (1965), págs. 13-37.

Lo, Andrew. "Long-Term Memory in Stock Market Prices". Econometrica, vol. 59, nº 5, september 1991, pp 1279-1313.

Mandelbrot, B. "The Fractal Geometry of Nature". New York, W. H. Freeman, (1982).

Peters, Edgar. "Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility". John Wiley & Sons, Inc. (1991).

Peters, Edgar. "Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics". John Wiley & Sons, Inc. (1993).

Peters, Edgar. "Fractal Structure in the Capital Markets". Financial Analysis Journal, julio-agosto (1989).

Reinganum, Marc. "Misspecification of Capital Asset Pricing". Journal of Financial Economics 9 (1981) págs. 19-46.

Sharpe, William. "Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk". Journal of Finance (1964), págs. 425-442.