DECISIONES DE INVERSIÓN: EJERCICIOS DEL CASO CONTINUO

SERGIO ZÚÑIGA J.[1]
Junio 2005

[1] Escuela de Ingeniería Comercial. Universidad Católica del Norte. Coquimbo.

INTRODUCCIÓN

Normalmente los cursos de gestión óptima de recursos de pregrado están centrados en las características técnicas de los procesos productivos, sin destacar la importancia de las secuencias temporales de producción. Es por esto que ofrecemos el presente documento docente, cuyo objetivo central es introducir al alumno de *Evaluación de Proyectos y Economía de Recursos* en las técnicas básicas de valuación en tiempo continuo. Esto requiere incorporar el tiempo como variable de decisión, elemento necesario para poder abocarse con posterioridad a herramientas más poderosas como son la Programación Dinámica y el Control Óptimo.

El trabajo está dividido en tres partes. La primera parte es introductoria y recordatoria de los conceptos y fórmulas de valor presente. En la segunda parte se derivan las condiciones de maximización más elementales de valores presentes en diferentes escenarios. La tercera parte y final contiene aplicaciones y ejercicios resueltos.

1. VALORES PRESENTES

1.1. Valor Presente: Caso Discreto

Comencemos nuestro análisis recordando que el valor presente (VP) en t=0 de un ingreso (Y) obtenido al final del período t, por ejemplo t=1 año, viene dado por:

$$VP = \frac{Y_t}{(1+i)^t} \qquad (1)$$

donde i es la tasa de interés o de descuento discreta, apropiada para el período (0,t). Las tasas de interés rigen por 1 año, a menos que se diga lo contrario.

Sin embargo, como el tiempo es en realidad una variable continua y no discreta (por ejemplo los seres vivos crecen a tasas continuas), debemos suponer que el interés se compone continuamente. Esto equivale a decir que el número de capitalizaciones (n) por período (t) aumenta, de forma tal que la tasa de descuento por período disminuye a i/n, y el número de períodos aumenta a n·t, es decir:

$$VP = \frac{Y_t}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n\cdot t}} = Y_t\left(1+\frac{i}{n}\right)^{-n\cdot t} \qquad (2)$$

1.2. Valor Presente: Caso Continuo

Analicemos el efecto de aumentar el número de capitalizaciones a través de un ejemplo, en el que hay un ingreso de $5.000 al final del cuarto año (Valor Futuro), y la tasa de descuento anual es del 20%. Usando (2), el Valor Presente para diferentes capitalizaciones es:

COMPOSICIÓN	ANUAL (n=1)	MENSUAL (n=12)	DIARIA (n=360)	CONTINUA (n=∞)
VP	4.166,67	4.100,00	4.093,88	4.093.65

Luego, si el número de capitalizaciones por período es infinitamente grande, el valor presente dado por (1) en realidad converge a un cierto valor. Para obtener ese resultado basta calcular el límite de (2) cuando n (el número de capitalizaciones por período) tiende a infinito:

$$\lim_{n \to \infty} VP = \lim_{n \to \infty} Y_t \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{-n \cdot t} = Y_t \cdot e^{-i \cdot t} \qquad (3)$$

donde e = 2.7182... es la base de los logaritmos naturales o neperianos.

Luego, si suponemos que t=1, y Y_t=\$1, podemos derivar la siguiente relación entre tasas discretas y continuas:

$$(1 + i_d) = e^{i_c} \qquad (4)$$

donde i_c es la tasa de descuento continua, y i_d es su equivalente discreta. De aquí, podemos despejar las siguientes equivalencias:

$$i_d = e^{i_c} - 1 \qquad y \qquad i_c = \ln(1 + i_d) \qquad (5)$$

Así por ejemplo, si la tasa i_d = 15% anual y deseamos calcular el valor presente en tiempo continuo de \$500 a recibir en 2 años a partir de hoy, entonces VP = $500e^{-0.1398 \cdot 2}$ = 378.04

1.3. Anualidades: Caso Discreto

Cuando se trata de procesos continuos de descuento sobre corrientes de pagos o anualidades, generalizando (1) podemos calcular el valor presente de una serie de ingresos obtenidos discretamente a fines de T fechas (la tasa de descuento por período es supuesta constante) como:

$$VP = \sum_{t=0}^{t=T} \frac{Y_t}{(1 + i)^t} \qquad (6)$$

es decir la suma de los valores presentes de todos los ingresos, Y_t, en que el descuento ocurre a intervalos discretos.

En el caso particular de que los valores Y_t sean iguales a una constante Y (no son funciones del tiempo), entonces la suma en valores presentes se llama **anualidad** y puede mostrarse, resolviendo la serie finita, que ésta viene dada por:

$$VP = Y \cdot \left(\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right) \qquad (7)$$

En este caso, el VAN de un proyecto con T flujos iguales a F, y una inversión inicial de Io, está dado por:

$$VAN = -Io + \frac{F}{(1+i)^1} + \frac{F}{(1+i)^2} + ... + \frac{F}{(1+i)^T} = F\left[\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}\right]$$

En el caso anterior el primer flujo F ocurre en t=1 (anualidad vencida). Cuando el primer flujo ocurre en t=0 se tiene una anualidad anticipada, y en este caso aún puede usarse la fórmula de anualidad vencida, pero puesto que esto actualizará hasta el momento t=-1, al multiplicar todo por (1+i) se lleva nuevamente a t=0, es decir:

$$VAN = -Io + F + \frac{F}{(1+i)^1} + \frac{F}{(1+i)^2} + ... + \frac{F}{(1+i)^{T-1}} = -Io + F\left[\frac{1-(1+i)^{-(T-1)}}{i}\right](1+i)$$

En este caso se tienen T flujos, al igual que en el caso anterior, es decir de t=0 a t=T-1.

1.4. Perpetuidades

Cuando el número de períodos con pagos/ingresos sea muy grande (t→∞), entonces se tendrá simplemente el valor presente de una **perpetuidad**:

$$VAN = -Io + \frac{F}{i} \qquad (8)$$

Cuando el flujo F crece a una tasa constante g, entonces se tiene una perpetuidad creciente, y su Valor presente viene dado por:

$$VAN = -Io + \frac{F}{i-g}$$

1.5. Gradiente Aritmético Creciente

A continuación se muestra el Valor Presente de una anualidad en que los flujos tienen crecimiento durante solo un periodo de tiempo.

El flujo inicial (vencido) es F_1, y los flujos siguientes serán igual a F_1 más una cantidad G acumulada en cada flujo sucesivo (crecimiento aritmético). De este modo el flujo en t es F_t=A+t*G. El valor presente de esta anualidad es:

$$VP = F_1\left(\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}\right)+\frac{G}{i}\left(\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}-\frac{T}{(1+i)^{T}}\right)$$

Ejemplo: F_1=\$ 62.663,44, G=5.000, T=12, i=2,667%.
Esto implica que: en t=2, \$ 67.663,44; en t=3, \$72.663,44, ...,; en t=24, \$ 177.663,44; VP=\$2.000.000.

1.6. Gradiente Geométrico Creciente

En el caso de un gradiente geométrico creciente de los flujos, el flujo inicial (vencido) es F_1, y los flujos siguientes serán igual a F_1 incrementado en la tasa g en cada flujo sucesivo (crecimiento geométrico). De este modo el flujo en t es $F_t= F_1(1+g)^t$.

El valor presente de esta anualidad es:

$$VP = \frac{F_1}{i-g}\left(1-\frac{(1+g)^{T}}{(1+i)^{T}}\right)$$

Ejemplo: F_1=\$50, T=15, i=12%, g=4%. Esto implica que hay un flujo de \$50 en t=1, \$52 en t=2, \$54,08 en t=3, ..., \$ 86,58382238 en t=15; VP=\$419,36.

1.7. Anualidades: Caso Continuo

Si el tiempo es una variable continua, las transacciones pueden tener lugar en cualquier momento, y entonces egresos e ingresos toman la forma de valores-flujo, los que pueden tener un «caudal» (cantidad de dinero por unidad de tiempo) constante, o como una función del tiempo t en el que ocurren.

Ya no hablamos de cantidades de dinero obtenidas a fines de un período, sino de una corriente o caudal continuo de dinero dada por Y(t), una función el tiempo, y el ingreso obtenido durante un intervalo pequeño (t,dt) es Y(t)dt. Si el intervalo de tiempo bajo estudio va de desde t=0 hasta t=T, el valor presente del flujo viene dado por la integral definida:

$$VP = \int_{t=0}^{t=T} Y(t)e^{-it}\, dt \qquad (9)$$

Cuando los valores flujo son iguales, Y(t)=Y como en el caso discreto, entonces la suma en valores presentes se llama 'anualidad continua' y viene dada por:

$$VP = Y \int_{t=0}^{t=T} e^{-it}\, dt = \left(-\frac{Y}{i} \right) e^{-it} \Big|_{0}^{T} = Y\left(\frac{1 - e^{-iT}}{i} \right) \qquad (10)$$

resultado equivalente a (7), y en caso de que el numero de ingresos sea muy grande ($t \rightarrow \infty$) se tendrá también el mismo resultado dado por (8), es decir, Y/i.

Es interesante mencionar que si Y=Y(t) es el caudal en el instante t medido en pesos por año, el ingreso/egreso obtenido/pagado en un instante es cero, a diferencia de un intervalo finito (por pequeño que sea) donde siempre se obtiene un ingreso no cero.

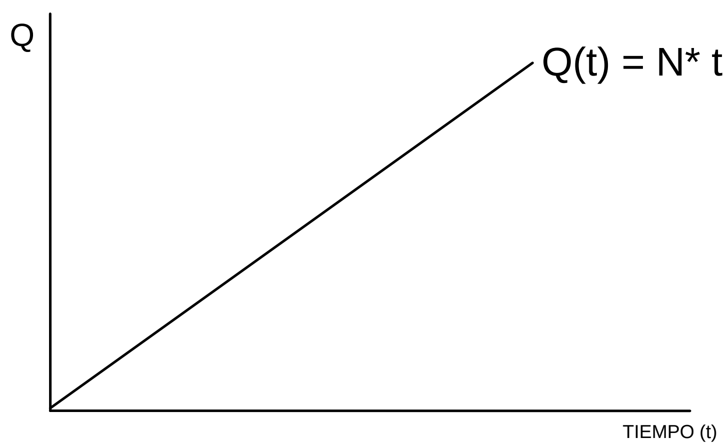
Es claro que puesto que se trata de flujos continuos, no existe diferencia entre anualidad anticipada o vencida.

2. PRODUCCIÓN, INGRESO Y COSTO EN TIEMPO CONTINUO

En términos simplificados, una empresa en operación genera un caudal de producción, ingresos y costos continuamente. El valor presente de los ingresos, costos y gastos futuros será igual a la integral o suma de estos caudales, descontados a la tasa de descuento apropiada.

2.1. Producción

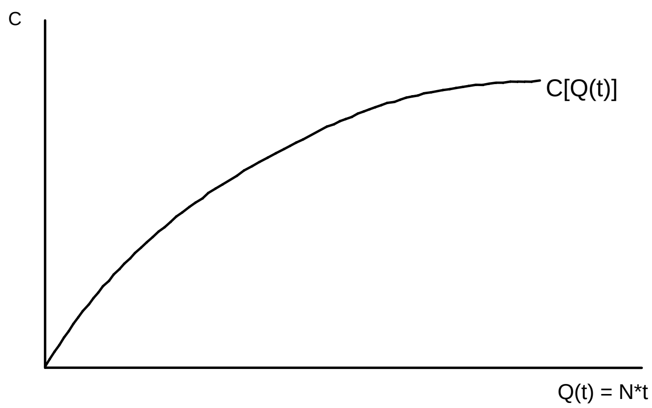
Si definimos Q(t) a la cantidad (acumulada) de unidades producidas por la empresa hasta el momento t, entonces la tasa de producción es dQ/dt. En el caso más simple, en que la tasa de producción sea constante: dQ/dt = N, entonces Q(t) = dQ/dt·dt = N·dt = N·t, es decir la producción será una función lineal del tiempo, donde la pendiente de línea recta será justamente la tasa de producción, tal como se ilustra a continuación:



Las funciones de ingreso y costo (cuyos caudales serán integrados a fin de calcular su valor presente) son a su vez función de Q(t), o de otro modo, de la tasa de producción dQ/dt, es decir C[Q(t)], función que puede tener una forma cóncava como la siguiente ilustración[2]. En cualquier caso, C[Q(t)] representa un acumulado de los costos hasta el momento t, dada una tasa de producción.

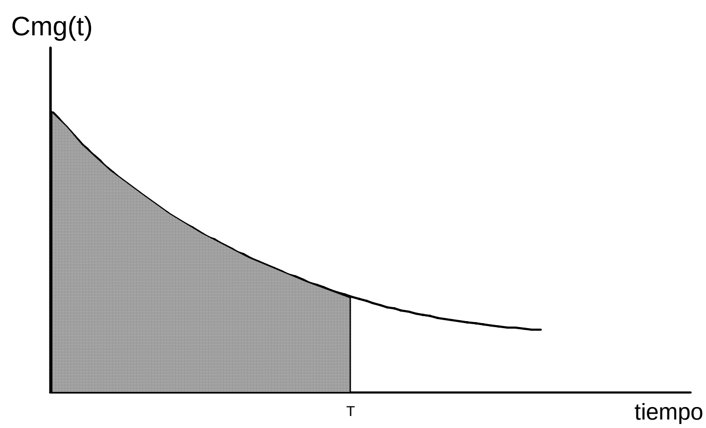
[2] O más del agrado de economistas, una función con segmentos cóncavos primero (rendimientos crecientes), y convexos después (rendimientos decrecientes).

La siguiente ilustración muestra el caso de una función con un efecto de "aprendizaje", que arrojaría costos decrecientes (o rendimientos crecientes):



2.2. Costos

Por otro lado, el flujo instantáneo (que llamamos costo marginal o caudal), es simplemente: $Cmg(t) = \delta C[Q(t)]/\delta t$, que en el caso de una tasa de producción constante y costos decrecientes, como el caso descrito arriba, viene dada por la siguiente ilustración[3]:



Entonces, para obtener el valor presente de los costos entre cierto intervalo, basta obtener $\delta C(t)/\delta t$ para determinar el caudal o tasa de generación por período t (tal como la ilustración anterior).

[3] Note que en caso de una función de costos con segmentos cóncavos y convexos, podría deducirse una región/nivel óptimo de producción debido a la existencia de una curva de costos marginales con forma de U.

Así el área bajo la curva $\delta C(t)/\delta t$ (obtenida por integración) entrega los costos acumulados entre los límites deseados, mientras que el valor presente se obtendrá aplicando el factor de actualización, es decir:

$$VP = \int_{t=0}^{t=T} Cmg(t)e^{-it}\,dt \tag{11}$$

Naturalmente, las decisiones de aceptación o rechazo de alternativas de inversión se tomarán bajo el criterio de obtener el máximo Valor Actual Neto (VAN), es decir el valor presente de los ingresos menos el valor presente de los egresos: VAN = VP(Ingr)-VP(Egr).

En algunos esquemas que veremos a continuación, el problema es encontrar el momento óptimo de duración de proyectos para MAX VAN, pero en muchas otras aplicaciones el problema se reduce a estimar el VAN de las diferentes alternativas mutuamente excluyentes, tales como procesos de producción, y tamaños o escalas de producción alternativas, y seleccionar aquella con mayor VAN.

Antes de pasar a estas aplicaciones, note que cuando los ingresos/egresos se generan sólo en un momento futuro ya no existe un caudal, sino una cierta suma de dinero futura, y no es apropiado entonces integrar para estimar el VAN.

3. CONDICIONES DE OPTIMIZACION EN TIEMPO CONTINUO

A continuación revisaremos las más comunes y sencillas aplicaciones de modelos económico-financieros en tiempo continuo, en el caso determinístico, es decir, cuando se asume conocido y sin riesgo el valor futuro de las variables y la tasa de descuento apropiada.

3.1. Modelo 1

El más simple problema de inversión de este tipo ocurre cuando todos los inputs se aplican en un punto en el tiempo, y todos los outputs se venden en un momento posterior (por ejemplo el almacenamiento del vino). Entonces, se tiene un VAN que depende de dos valores punto, el inicial y el final. Así, el problema de optimización consiste en seleccionar el período (vida óptima, T) que maximice el valor actual del beneficio, que viene dado por:

$$VAN = -I_0 + Y(T)e^{-iT}$$

Para maximizar el VAN igualamos a cero la derivada parcial del VAN con respecto a T, y despejamos i para obtener la condición de primer orden o **solución de FISHER**:

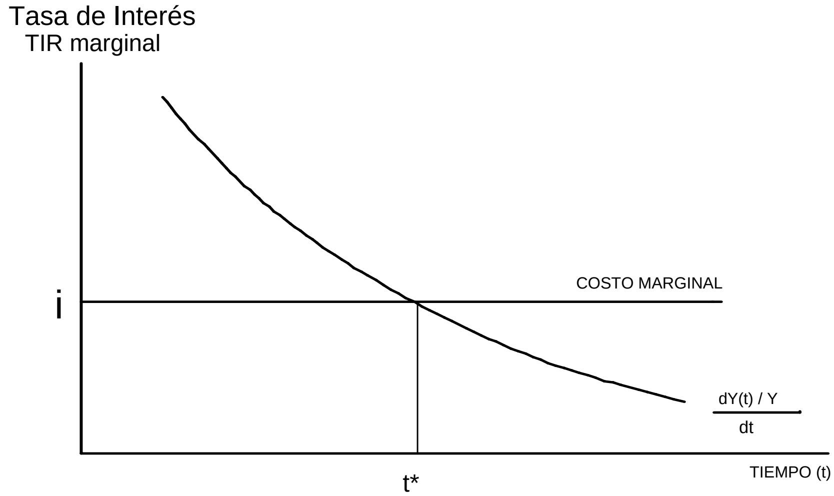
$$\frac{Y'(T)}{Y(T)} = i$$

donde Y'(T) /Y(T) es el rendimiento o Tasa Interna de Retorno Marginal (TIRmg).

La condición establece que el rendimiento porcentual adicional en T, producto de extender el proyecto en un período (dT) debe ser igual a la tasa de interés i, o costo de oportunidad. Esta condición permite que si se conoce i, se puede despejar o iterar T[4] para encontrar el momento óptimo de cosecha, es decir para maximizar el VAN.

Para entender por qué, analicemos la siguiente ilustración donde aparecen por un lado la TIRmg (decreciente debido a las condiciones de segundo orden) y por otro la tasa de descuento o costo de oportunidad (constante):

[4] Las condiciones de segundo orden requieren que el la TIRmg respecto al tiempo debe ser decreciente. Note que un incremento de las tasa de interés inducirán a acortar el período de inversión y una reducción obligarán a alargarlo.



El óptimo se logra necesariamente en t*, la intercepción de ambas curvas, debido a que:

- Si el proyecto durara menos que el óptimo (t<t*): el beneficio de extender la vida del proyecto, dY(T)/Y(T), sería mayor que el costo de oportunidad asociado (i), y convendrá en consecuencia extender la vida del proyecto.

- Si el proyecto durara más que el óptimo (t>t*): el beneficio de extender la vida del proyecto, dY(T)/Y(T), sería menor que el costo de oportunidad asociado (i), y convendrá en consecuencia reducir la vida del proyecto. ¿qué efecto tiene un alza en las tasas de descuento?, ¿por qué?

3.2. Modelo 2

Si existe valor de uso alternativo o valor de rescate del proyecto en (t) dado por V, entonces el VAN se redefine por:

$$VAN = -I_0 + Y(T)e^{-iT} + Ve^{-it}$$

Repitiendo el proceso de maximización, puede mostrarse que la condición de óptimo es:

$$\frac{Y'(T)}{Y(T)+V} = i$$

y la justificación es similar a la anterior, en el sentido que la rentabilidad media en T, calculada como el ingreso adicional (Y'(T)) respecto al ingreso total (Y(T)+V), debe ser igual a la tasa de interés. (¿qué ocurre si aumenta V?)

3.3. Modelo 3

Si se incurre en un flujo o caudal de costos C(T) a través del tiempo, pero se vende todo el output en un sólo momento T obteniendo Y(T), tal como en el caso del cultivo de especies agrícolas, forestales, ganaderas o acuícolas, el valor actual del beneficio es:

$$VAN = - I_0 + Y(T)e^{-iT} - \int_{t=0}^{t=T} C(t)e^{-it}\,dt$$

Para maximizar el VAN, igualamos a cero la derivada parcial del VAN con respecto a T, y despejamos i para obtener la condición de primer orden (verifíquela):

$$\frac{Y'(T) - C(T)}{Y(T)} = i$$

Esta condición indica que se debe vender la producción cuando la tasa de rendimiento marginal con respecto al tiempo, neto de los costos en el momento T, sea igual a la tasa de descuento.

3.4. Modelo 4

Si se incurre realiza inicialmente una inversión de Io, lo que genera u flujo o caudal de ingresos Y(T), a través del tiempo, más un ingreso al final del periodo, dado por V(T), tal como en el caso de la compra de maquinarias, (encontrar la **VIDA ÓPTIMA DE UNA MAQUINA**), el valor actual del beneficio es:

$$VAN = - I_0 + \int_{t=0}^{t=T} Y(t)e^{-it}\,dt + V(T)e^{-iT}$$

y para obtener la condición de óptimo, igualamos a cero la derivada parcial de VAN con respecto a T, obteniendo[5]:

$$\frac{V'(T) + Y(T)}{V(T)} = i \qquad (19)$$

que indica que se debe vender la producción cuando la tasa de rendimiento marginal, dado por la venta del ingreso del final del periodo, V(T), más los ingresos en el momento T, sea igual a la tasa de descuento.

[5] Véase ecuación (12-39) en Henderson y Quandt.

4. REPLICABILIDAD

En este apartado nos avocamos a los ciclos de negocios: Un bosque es plantado, cosechado y replantado; una máquina es construida, usada y desmantelada; y así, en muchas áreas de negocios.

A continuación se analiza la situación en que un proyecto puede ser replicado (repetido) a una escala idéntica un cierto número de veces. El proyecto en cuestión tiene una duración de T periodos, puede ser replicado n veces, y la tasa de descuento de un período es i.

4.1. Replicabilidad a Perpetuidad en Tiempo Discreto

Cuando se debe decidir entre dos o más alternativas de proyectos de diferente vida, pero replicables a un mismo horizonte, podemos calcular el 'Valor Anual Equivalente' (VAE) de uno de esos proyectos usando el concepto de anualidad de la ecuación (7), lo que transforma los t flujos de cada proyecto (más la inversión inicial) en una serie de t flujos iguales o VAE:

$$VAE = \frac{VAN}{\left(\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}\right)}$$

Así, cuando se tienen n réplicas del proyecto, reescribimos el VAN(n) como la suma (vencida) de T*n flujos periódicos iguales al VAE:

$$VAN(n) = \frac{VAE}{(1+i)} + \frac{VAE}{(1+i)^2} + ... + \frac{VAE}{(1+i)^{Tn}} = VAN + \frac{VAN}{(1+i)} + \frac{VAN}{(1+i)^2} + ... + \frac{VAN}{(1+i)^n}$$

Ejemplo: VAN=$735,5, t=3, i=0,1. Entonces VAE=$423,8

Para tomar una decisión acerca de cuál proyecto es más conveniente, basta elegir un horizonte común y comparar solamente el VAE de los proyectos.

Un caso especial de replicabilidad de proyectos a igual horizonte, ocurre con réplicas infinitas ($n \to \infty$). En este caso puede calcularse el VAN(∞) actualizando el flujo perpetuo de VAE a la tasa i como sigue:

$$VAN(\infty) = \frac{VAE}{i}$$

lo que en términos de VAN es equivalente a la siguiente expresión, que es de gran utilidad:

$$VAN(\infty) = \frac{\dfrac{VAN}{\left(\dfrac{1-(1+i)^{-T}}{i}\right)}}{i} = \frac{VAN}{1-(1+i)^{-T}}$$

Nótese que en este caso se trata de una actualización perpetua del VAN de tipo anticipada, es decir el primer VAN está situado en t=0.

Ejemplo: VAN=\$735,5, t=3, i=0,1. Entonces VAE=\$423,8 y VAN(∞)=\$4.238,0=735,5/(1-1,1^-2).

Cuando se tiene replicabilidad infinita pero con el primer VAN de tipo vencido, es decir en t=1 y no en t=0 como en el caso anterior, se tiene que se debe eliminar el VAN=0, y con algo de álgebra se obtiene que:

$$VAN(\infty) = \frac{VAN}{1-(1+i)^{-T}} - VAN = \frac{VAN\left[1-(1+i)^{-T}\right] - VAN}{1-(1+i)^{-T}}$$
$$= VAN\left[\frac{(1+i)^{-T}}{(1+i)^{T}-1}\right] = \frac{VAN}{(1+i)^{T}-1}$$

4.2. Replicabilidad a Perpetuidad en Tiempo Continuo

Para el caso de replicabilidad perpetua (si n, el número de réplicas, tiende al infinito) en tiempo continuo, se tiene que el factor de actualización, análogo al caso discreto, es:

$$VA(vencida) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-iTn} = \frac{1}{e^{-iT} - 1} \qquad VA(anticipada) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-iTn} = \frac{1}{1 - e^{-iT}} \qquad (24)$$

4.2.1. Modelo A

El VAN con réplicas infinitas y anticipado se expresa entonces por:

$$VAN(\infty) = \left[- I + Y(t)e^{-iT}\right] - \left[Ie^{-it} + Y(t)e^{-2iT}\right] + ... = \frac{VAN}{1 - e^{-iT}} \qquad (25)$$

que es equivalente al caso de tiempo discreto.

4.2.2. Modelo B

Si el valor actual del beneficio es igual al valor actual de una corriente de ingresos (Y), menos el costo de la máquina (I), más el valor actual del valor residual, S(T), entonces:

$$VAN(n) = \left[- I_0 + \int_{t=0}^{t=T} Y(t)e^{-it}\,dt + S(T)e^{-iT} \right] + \left[- Ie^{-iT} + \int_{t=T}^{t=2T} Y(t-T)e^{-it}\,dt + S(T)e^{-2iT} \right] + ...$$

que en el caso de infinitas réplicas se transforma en:

$$\boxed{VAN(\infty) = \frac{- I + \int_{0}^{T} Y(t)e^{-it}\,dt + S(T)e^{-iT}}{1 - e^{-iT}} = \frac{VAN}{1 - e^{-it}}}$$

expresión que coincide con el caso de valores punto, pero para una diferente definición del VAN.

4.3. Condiciones de Óptimo en Modelos con Replicabilidad

4.3.1. Modelo A

Si queremos obtener la condición que maximiza el VAN(∞), entonces puede mostrarse que:

$$\frac{\partial VAN(\infty)}{\partial t} = \frac{VAN'(T)\left(1 - e^{-iT}\right) - ie^{-iT}VAN(T)}{\left(1 - e^{-iT}\right)^2} = 0$$

$$VAN'(T)\left(1 - e^{-iT}\right) - ie^{-iT}VAN(T) = 0$$

$$VAN'(T) = ie^{-iT}\frac{VAN(T)}{\left(1 - e^{-iT}\right)} = ie^{-iT}VAN(\infty) = 0$$

$$\frac{VAN'(T)}{VAN(\infty)} = i \quad o \quad \frac{VAN'(T)\left(1 - e^{-iT}\right)}{VAN(T)} = i$$

también conocido como el óptimo de rotación, o la **solución de FAUSTMANN** (1849) popularizada por Samuelson (1976). De esta ecuación es posible despejar el t^* óptimo = T, que indicará el número de réplicas óptimo.

4.3.2. Modelo B

La condición que maximiza el VAN(∞), tal que dVAN(∞)/dt = 0 implica como condición que[6]:

$$\frac{VAN(T)}{Y(T) + S'(T)} = \frac{1 - e^{-iT}}{i}$$

$$\frac{\left[Y(T) + S'(T)\right]\left(1 - e^{-iT}\right)}{VAN(T)} = i$$

y de este modo, el momento óptimo de cosecha bajo replicabilidad, ocurre en un momento equivalente al Modelo A.

[6] Véase ecuación (12-40) en Henderson y Quandt, 1985

5. EL PROBLEMA DE LA TALLA CRITICA

Muchos estudios bioeconómicos aplicados al sector pesquero y acuícola buscan evaluar la talla crítica de las diferentes especies sometidas a extracción. Estos estudios generalmente llegan a una proposición de la talla mínima de extracción comercial, para lo cual usan un procedimiento similar al siguiente:

Sea N_t el número de individuos a la edad t, y W_t el peso individual de los mismos, entonces la biomasa es $B_t = N_t \cdot W_t$:

$$B_t = \left(N_{t-1} e^{-M \cdot t}\right) \cdot \left(W_\infty (1 - e^{-i \cdot t})^b\right) \qquad (28)$$

donde M es la tasa de mortalidad instantánea, i la tasa de crecimiento, b es generalmente 3, y W_∞ es el peso máximo de la especie. Derivando B_t respecto a t, e igualando a cero se tiene la condición de maximización (verifíquela):

$$t = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{ib + M}{M}\right) \qquad (29)$$

Conociendo la edad óptima, entonces es posible resolver la talla óptima, usando para esto la relación de Von Bertalanffy (note que esta no es una solución económica, ya que no considera el costo de oportunidad).

6. MAXIMIZAR LA TASA INTERNA DE RETORNO

Finalmente, es posible también maximizar la Tasa Interna de Retorno (TIR) y no el VAN, a pesar que TIR es incorrecta debido básicamente al supuesto de reinversión continua. En este caso, sabemos que la TIR es aquella tasa que hace que el VAN sea cero:

$$VAN = - I_0 + Y(T)e^{-iT} = 0$$

aplicando logaritmos y despejando i, se tiene que el objetivo es maximizar la tasa interna de retorno, dada por:

$$\text{MAX } i = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{Y(T)}{I}\right)$$

que corresponde a la **solución de BOULDING (1966)**, obtenible derivando e igualando a cero, o iterando.

7. EJERCICIOS RESUELTOS

EJEMPLO 1: (COPELAND Y WESTON):

A Ud. se le presenta una alternativa de inversión en una plantación de árboles cuyo desembolso inicial requerido es de \$15.000. El costo de oportunidad del capital es del 5% anual. El ingreso que puede ser obtenido en el momento t está representado por:

$Y_t = 10.000 \sqrt{(1+t)}$

a) ¿Cuándo deben cortarse los árboles para maximizar el VAN?

Aplicando la condición de primer orden:

$0,05 = [\ 5.000\ (1+t)^{-0,5}\ ] / 10.000\ (1+t)0,5 = 1/2(1+t) \Rightarrow 0,1 = 1/(1+t)$

y t = 9 años con un VAN = 5.164

b) ¿Cuándo deben cortarse los árboles para MAX TIR?

Iterando para MAX TIR tenemos que T=4 años y TIR max=9.98%

c) ¿Cuándo deben cortarse los árboles si es posible repetir el proyecto en condiciones idénticas infinitas veces?

$$f'(t) = \frac{(f(t)-I)i}{1 - e^{-it}} \Rightarrow 5.000(1+t)^{-0,5} = \frac{(10.000(1+t)^{0,5} - 15.000)\cdot 0,05}{1 - e^{-0,05\cdot t}}$$

iterando para t obtenemos t = 4,6 y VAN(∞) = 18.505

EJEMPLO 2: (BIERMAN Y SMITH):

Sea $f(t) = -350 + 60t - 0,5t^2$ para $10 \leq t \leq 30$ una función de ingresos proveniente de una plantación de árboles que le es disponible; la tasa de costo de oportunidad es del 5% anual.

a) ¿Cuándo se deben cosechar los árboles si el valor de la tierra es ignorado?

R: t_1=22.55 ó t_2=137.44, como t_2 está fuera del rango, entonces t debe ser 22.55.

b) ¿Si el valor de la tierra es \$ 500?

R: t_1=14,425 ó t_2 = 145,57, como t_2 está fuera del rango, entonces t debe ser 14.425.

c) ¿Si el costo de replantar es de \$ 50?

R: Iterando en $0.05 = \dfrac{60-t(1-e^{-0.05t})}{-400+60t-0.5t^2}$ se tiene que t=17.4

EJEMPLO 3:

Recientemente un amigo suyo ha efectuado estimaciones para una población del molusco abalón referidas a peso (en gramos) y número de individuos vivos a través del tiempo. Sus estimaciones son $W_t = 10(1-e^{-0.25t})^3$ (Von Bertalanffy) y $N_t = 15\ e^{-0.2t}$ respectivamente. Su amigo le pide ayuda para estimar la edad óptima de cosecha de los abalones dado que el precio (de \$2 por gramo) se estima constante a través del tiempo y que la tasa de costo del capital continua anual es del 14%. Se pide resolver el problema de edad óptima tanto como le sea posible.

RESPUESTA: $Y_t = W_t \cdot N_t \cdot P = 10(1-e^{-0.25t})^3\ (15e^{-0.2t}) \cdot 2$

Formando la condición $Y_t'/Y_t = i$ e iterando el valor de t que satisface la condición se tiene t = 4,6.

EJEMPLO 4:

Se compran semillas de árboles por \$100 en el momento t=0, y hay un flujo o caudal continuo de costos de cultivo dado por $G(t) = \$100t^{1/2}$ anuales mientras los árboles van creciendo. Finalmente, se venden los árboles en $Y(T) = \$900t^{1/2}$ en el momento t=T. ¿cuál es el momento óptimo para vender los árboles si la tasa de descuento es del 5% anual?

RESPUESTA: Aplicando la condición de maximización y simplificando:

$1/2t - 29/180 = 0$ de donde t=3.103 años.

EJEMPLO 5:

Una empresa ha comprado una maquina que entregará un flujo de ingresos netos dado por: $E(t) = 225 - 1/4\ t^2$, un flujo de costos de reparación y mantenimiento dado por $R(t) = 2t^2$, y un valor de rescate dado por $S(t) = 6480/(6+t)$, donde t está expresado en años, E y R en dólares. Se desea conocer el momento óptimo para retirar la máquina:

a) Si no existe costo de oportunidad (i=0%):
Iterando en $-6480/(t+6)^2 - 9t^2/4 + 225 = 0$ se tiene que t=9.37 años

b) Si el costo de oportunidad es el 18%:
Iterando en $-6480(9t+104)/(5(t+6)^2) - 9t^2/4 + 225 = 0$ se tiene que t=6.15 años

Note que al existir y/o aumentar el valor de uso del dinero, manteniendo lo demás constante, se reducirán los períodos óptimos.

EJEMPLO 6:

Usted se encuentra evaluando dos proyectos acuícolas mutuamente excluyentes, para lo cual debe estimar el VAN de cada uno de ellos a un horizonte de 10 años (t=120 meses). Estos consisten en adquirir la tecnología necesaria para engordar larvas de camarón con una inversión inicial de $5.500.000 para ambos casos. La tasa de descuento continua es del 2% mensual.

- El proyecto A presupuesta ingresos sólo al momento de la venta (cosecha) dados por el peso (en gramos) $W_t = 500*Ln(50+t^2)$ a un precio de $20 el gramo. Los costos operacionales (de alimentación y almacenamiento) se estiman continuos y constantes a través del tiempo en $10.000 mensuales.

- El proyecto B presupuesta ingresos continuos de $18.000 y los costos operacionales (de alimentación y almacenamiento), continuos y acumulados hasta t, están dados por $C(t) = 300t^{1/3}$

Se pide formular el problema de estimar el VAN para cada caso (Los resultados de este ejemplo no tienen sentido económico, sólo metodológico).

RESPUESTA

a) $VAN = -5500000 + 500 \bullet 20 \bullet \mathrm{LN}(50 + 120^2)\, e^{-0.02 \bullet 120} - \int_{t=0}^{t=120} 10.000\, e^{-0.02t}\, dt = -5.945.940 < 0$

b) $VAN = -5500000 + \int_{t=0}^{t=120} 18000\, e^{-0.02t}\, dt - \int_{t=0}^{t=120} 100\, t^{-2/3}\, e^{-0.02t}\, dt = -4.682.590 < 0$

y en ambos casos rechazamos la inversión.

EJEMPLO 7: INVERSIÓN EN EDUCACIÓN (Henderson y Quandt):

Una persona al terminar la enseñanza secundaria, t=0, debe decidir entre entrar trabajar o continuar su educación. Los flujos de ingreso en ambos casos duran hasta su retiro, t=T=50 años. Si se entra inmediatamente a trabajar su corriente de ingresos es $g(t)=2400e^{0.08t}$, y si va a la universidad, es $f(t)=800e^{0.12t}$. Asuma que se desconoce la tasa de descuento apropiada.

SOLUCIÓN: En este caso el problema se resuelve como sigue:

$$VAN = \int_{t=0}^{t=50} [800\, e^{0.12t} - 2400\, e^{0.08t}]\, e^{-it}\, dt = 800[\frac{e^{(6-50i)} - 1}{0.12 - i} - \frac{3(e^{(4-50i)} - 1)}{0.08 - i}] = 0$$

donde basta conocer el valor de i (la tasa de descuento) para conocer el VAN. Sin embargo haciendo VAN=0 se encuentra que, iterando, con i=0.088 el VAN=0, por lo tanto, la educación universitaria es una inversión favorable si las tasas de descuento son menores que 8,8%.

8. APLICACIÓN: EVALUACIÓN DE UN PROYECTO

El siguiente ejemplo resume un interesante trabajo realizado por U.E. Reinhardt, en el que se evalúa la conveniencia de otorgar un crédito, por parte de Congreso de los Estados Unidos, a una fábrica de aviones norteamericana para financiar el desarrollo del modelo L-1011, que planeaba producir desde fines de 1971 a fines de 1977 una cantidad de 220 aviones (es decir N=3 aviones por mes), que creían eran las ventas de equilibrio. Sobre este punto, la cantidad de equilibrio, se centró la discusión.

La información disponible para la evaluación es la siguiente:

a) El costo del Capital (k): Puede ser definida por

$$k = \sum_{j=1}^{j=n} w_j k_j$$

donde k_j es el costo efectivo por dólar después de impuesto, de la j-ésima fuente de fondos, y w_j es la proporción (a valores de mercado) de la j-ésima fuente de recursos de la estructura de capital estimada óptima por la empresa.

Simplificando a 2 fuentes de recursos, históricamente la empresa ha preferido una relación 30% deuda y 70% patrimonio. El costo de la deuda después de impuestos es de 5%, y el costo del patrimonio se estima en 12% (crecimiento de las ganancias por acción de 6.5% más una relación dividendo/precio de 4.2% más costos de flotación). Con esto, el costo del capital apropiado se estima en 10%.

La tasa mensual es $k_m=1.1^{1/12}-1$, y la tasa continua mensual es $i=LN(1+k_m)=0.7943\%$.

b) Costos No Recurrentes (CNR): Se refiere a los costos de investigación, desarrollo, prueba y evaluación (R), por un lado, y la construcción de facilidades, máquinas de herramientas, talleres de ensamblajes, etc (I) por otro lado. Se estima que R+I=\$900 millones, los que son requeridos durante los primeros A=42 meses a una tasa/flujo C_t asumida constante: $C_t = (R+I)/A$

$$VP(CNR) = \left(\frac{R+I}{A}\right)\int_{t=0}^{t=A} e^{-it}\,dt = \frac{900}{42}\int_{0}^{42} e^{-0.00794t}\,dt = 765.31$$

c) Costos Recurrentes (CR): Se sabe que los costos unitarios de producción (por avión) tienden a declinar a una tasa aproximadamente constante cada vez que se dobla la producción, reflejando de este modo el efecto aprendizaje: Si Y_1 = \$100 millones, es el costo de producir la primera unidad, el costo medio de producir Q aviones hasta el momento t es:

$$CMedio = CM(t) = Y_Q = Y_1 Q(t)^{-b}$$

$$CTotal = CT(t) = Y_1 \cdot [Q(t)]^{(1-b)}$$

El Flujo o Caudal instantáneo de costos está dado:

$$Cmg(t) = \delta CT(t)/\delta t = (1-b)Y_1[Q(t)]^{-b} \cdot \delta Q(t)/\delta t$$

donde se estima que b=0.36188.

Si asumimos que los aviones se producen a una tasa constante, $\delta Q(t)/\delta t = N = 3$ aviones por mes, entonces el número de aviones producidos hasta t es: $Q(t) = N\cdot(t-A)$, y podemos reescribir C(t) como:

$$Cmg(t) = (1-b)Y_1[t-A]^{-b}N^{(1-b)}$$

$$VP(CR) = (1-b)Y_1N^{(1-b)}\int_{t=A}^{t=T}(t-A)^{-b}e^{-it}dt = 126.146\int_{42}^{114}(t-42)^{-0.369188}e^{-0.00794t}dt = 1728.6$$

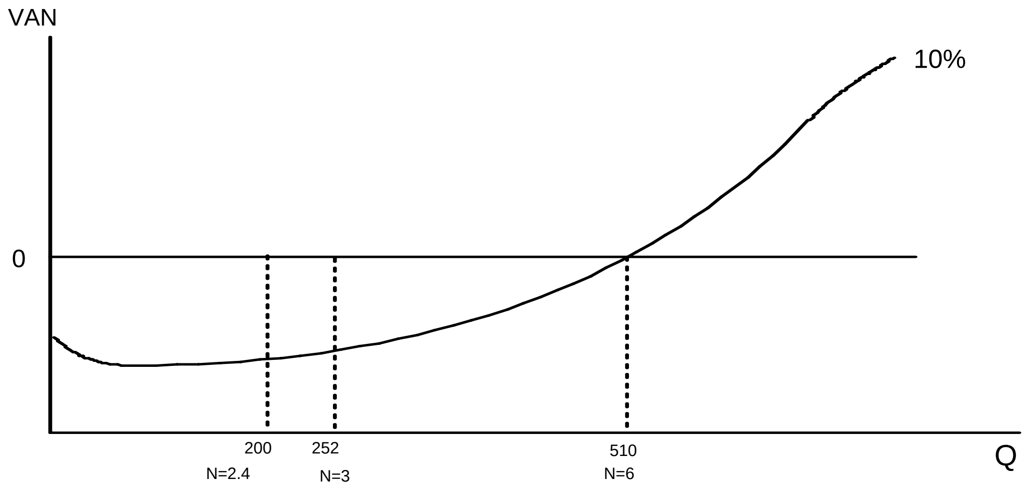
d) Ingresos (I): El caudal instantáneo de ingresos está dado por $\delta P\cdot Q(t)/\delta t$, donde el precio unitario es P=\$15.5 millones, es decir $R(t) = \delta(P\cdot Q)/\delta t = P\cdot N$

$$VP(I) = NP\int_{t=A}^{t=T} e^{-it}dt = 3(15.5)\int_{42}^{114} e^{-0.00794t}dt = 1826.9$$

e) El Modelo de Evaluación: Escribiendo la expresión completa del VAN se tiene que:

$$VAN(k) = [1-t][VP(I) - VP(CNR) - VP(CR)] = -333.55$$

donde t = 0.5 (la tasa de impuestos). Con estos datos, se resuelve que deberían producirse y venderse Q=510 aviones (N=6.07 aviones mensuales) para tener un VAN=0, punto equilibrio bastante superior a las estimaciones efectuadas por la propia empresa, la que aparentemente olvidó considerar los costos de oportunidad asociados.


VAN
10%
0
200
N=2.4
252
N=3
510
N=6
Q

REFERENCIAS

Canales y Ponce (1994). Informe Técnico: "Evaluación del Stock del Recurso Culengue en la IV Región. Ministerio de Economía, Fomento y Reconstrucción. Subsecretaría de Pesca.

Canales y Ponce (1995). Informe Técnico: "Determinación de la Talla Crítica del Recurso Culengue, y Proposición de una Talla Mínima de Extracción." Ministerio de Economía, Fomento y Reconstrucción. Subsecretaría de Pesca.

Clark, C. (1990). "Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of Renewable Resources". John Wiley and Sons, Inc.

Copeland, T. y F. Weston (1988). "Financial Theory and Corporate Policy". Addison-Wesley Publishing Co. Tercera Edición.

Bierman H. y S. Smidt (1988). "The Capital Budgeting Decision. Economic Analysis of Investment Projects". Macmillan Publishing Co.

Reinhardt, U. E. (1973). "Break-Even Analysis for Lockheed's Tri Star: An Application of Financial Theory". Journal opf Finance 32, págs. 821-838.

González-Dávila, G. (1990). "Edad óptima de Captura Según Método de Allen y Propuesta de Talla Mínima Legal para la Anchoveta Norteña". Ciencias Marina, 16. págs. 129-153.

Gulland, J. A. (1971). "Manual de Métodos para la Evaluación de las Poblaciones de Peces". ONU para la Agricultura y la Alimentación, FAO.

Gutierrez H. (1994). "Evaluación de Proyectos ante Certidumbre". Universidad de Chile.

Henderson J.M. y R. E. Quandt (1985). "Teoría Microeconómica". Ariel Economía.

Neher, P. (1990). "Natural Resource Economics. Conservation and Exploitation". Cambridge University Press.