UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE
ESCUELA DE INGENIERÍA COMERCIAL

INTRODUCCION A LA OPTIMIZACION USANDO EXCEL

SERGIO ZUÑIGA
ESCUELA DE INGENIERIA COMERCIAL
U. CATOLICA DEL NORTE – COQUIMBO

Junio de 2004

Profesionalizando la Gestión Empresarial

Larrondo 1281 - Coquimbo - Chile - Tel.: (56)(51) 209841 - 209843 - Fax: (56)(51) 209850 - e-mail: ingcomer@ucn.cl - página web: www.ucn.cl

INDICE

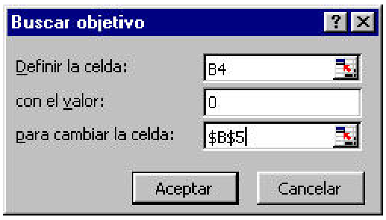
1. INTRODUCCION: HERRAMIENTAS BASICAS DE OPTIMIZACION EN EXCEL

1. BUSQUEDA DE OBJETIVO

En el caso de que conozca el resultado deseado de una fórmula o función sencilla f(X), pero no la variable (X) que determina el resultado, se podrá utilizar la función Buscar Objetivo en el menú Herramientas de Excel. Al realizar una búsqueda de objetivo, Excel varía el valor de celda específica (X) hasta que f(X) devuelve el resultado deseado.

Ejemplo: Punto de Equilibrio. Calcular la cantidad (B5) de equilibrio es decir para la cual la utilidad (B4) es igual a cero. Beneficio es Precio*Cantidad - Costo variable unitario*Cantidad - Costos Fijos, que traducido a celdas es = B3*B5-(B1+B2*B5):

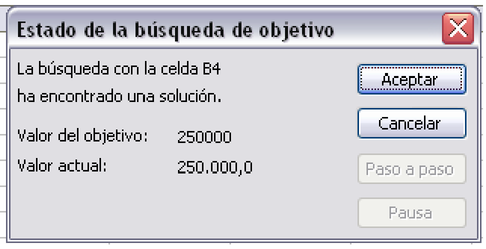
	A	B
1	Costos Fijos	100.000,0
2	Costos Variables Unitarios	100,0
3	Precio	200,0
4	Utilidad	400.000,0
5	Cantidad	5.000,0



La respuesta es: Cantidad = 1.000.

Calculemos ahora el Precio (B3) para el cual la empresa obtendrá un Beneficio de $250.000 si produce la cantidad de 5.000 unidades (B5):

	A	B
1	Costos Fijos	100.000,0
2	Costos Variables Unitarios	100,0
3	Precio	170,0
4	Utilidad	250.000,0
5	Cantidad	5.000,0
6		
7		
8		

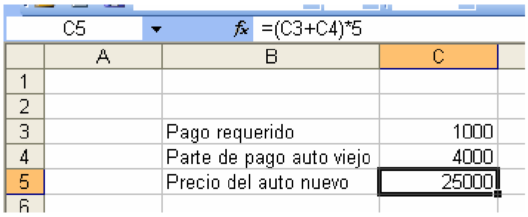


La respuesta es Precio = 170.

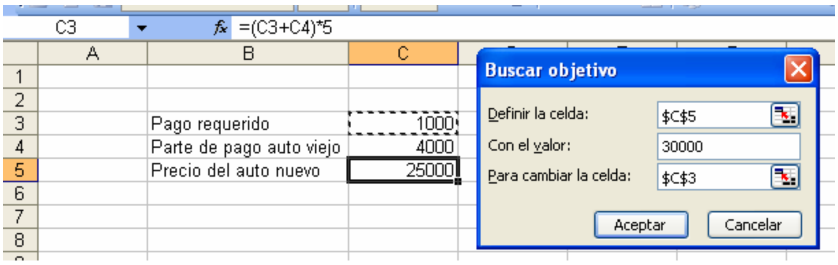
Ejemplo: ¿Qué nota necesito para aprobar una asignatura? Suponga que en la 1º evaluación, que vale un 30% ha obtenido nota 6, y en la 2º evaluación que vale 20% ha obtenido 3. ¿Qué nota debe obtener en el examen, que vale 50%, para obtener una nota final ponderada de 4.0?

Respuesta: 3.2

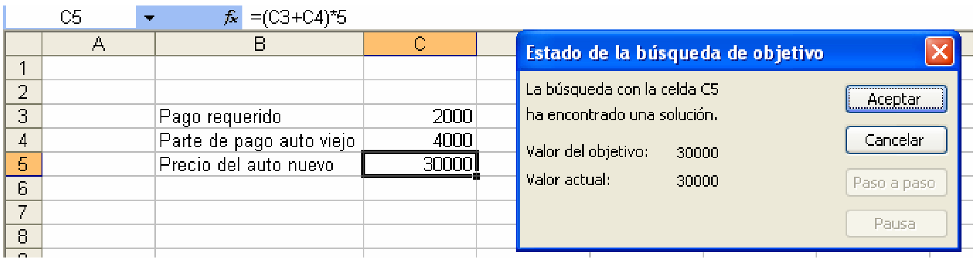
Ejemplo: Ud. desea comprar un auto nuevo, y que necesita un 20% como pie. Su actual vehículo tiene un valor de $4.000 para dar como parte de pago. Este dinero, más una suma de efectivo a aportar (X), deben completar el 20% del pie requerido para el auto nuevo. La pregunta es cuanto dinero en efectivo debo entregar como pie, según el precio del auto nuevo que elija. En Excel:



En particular, ¿cuanto debo poner de pie si el auto nuevo cuesta $30.000?



La respuesta es $2.000:



Y puede repetirse la operación para otros valores de autos nuevos.

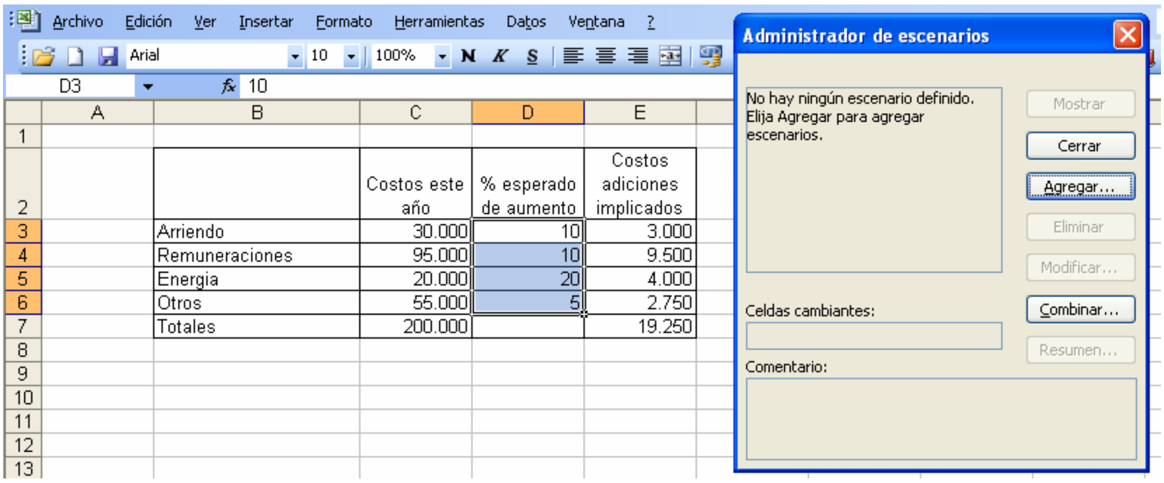
2. ADMINISTRACION DE ESCENARIOS

Es similar a la búsqueda de objetivo, sin embargo permite cambiar varias celdas simultáneamente para analizar los cambios.

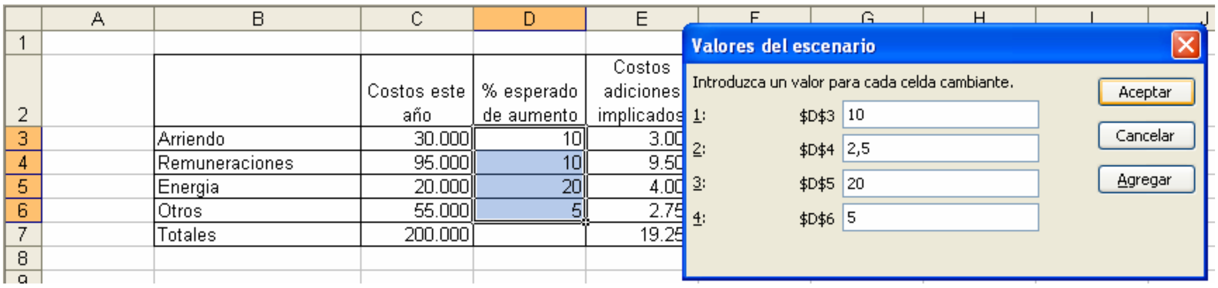
Los siguientes son los pagos de diferentes ítems para este año, y los porcentajes de aumento esperados de cada uno de los pagos para el próximo año.

	A	B	C	D	E
1					
2			Costos este año	% esperado de aumento	Costos adiciones implicados
3		Arriendo	30.000	10	3.000
4		Remuneraciones	95.000	10	9.500
5		Energia	20.000	20	4.000
6		Otros	55.000	5	2.750
7		Totales	200.000		19.250

Crearemos escenarios para las siguientes situaciones:
- Escenario 1: Remuneraciones tienen aumento esperado de solo 2,5% (otros ítems conservan los % de cambio originales).
- Escenario 2: Remuneraciones tienen aumento esperado de solo 2,5% y la energía tiene aumento esperado de 35% (otros ítems conservan los % de cambio originales).



Una vez asignado un nombre al escenario, deben introducirse los valores correspondientes:



Una vez definidos los dos escenarios, basta 'mostrar' cada escenario. En este caso el escenario 1 arroja costos adicionales de $12.125, y el escenario 2 de $15.125.

2. OPTIMIZACION LINEAL (PROGRAMACIÓN LINEAL)

1. INTRODUCCION

En muchas aplicaciones de la industria, la economía, la estrategia militar, etc. se presentan situaciones en las que se debe maximizar o minimizar algunas funciones objetivo, que se encuentran sujetas a determinadas restricciones[1].

Ejemplo 1: Problema de máximos. En una granja se preparan dos clases de alimentos, P y Q, mezclando dos productos A y B. Un saco de P contiene 8 kg de A y 2 de B, y un saco de Q contiene 10 kg de A y 5 de B. Cada saco de P se vende a $300 y cada saco de Q a $800. Si en la granja hay almacenados 80 kg de A y 25 de B, ¿cuántos sacos de cada tipo de alimento deben preparar para obtener los máximos ingresos?

Planteamiento: Si designamos por x al número de sacos de clase P, y por y el número de sacos de clase Q que se han de vender, la función:

$$Z = 300x + 800y$$

representará la cantidad de pesos $ obtenidas por la venta de los sacos, y por tanto es la que debemos maximizar. Las variables x e y lógicamente han de ser no negativas, por tanto: $x \geq 0$, $y \geq 0$. El conjunto de restricciones es:

$$8x + 10y \leq 80$$
$$2x + 5y \leq 25$$

[1] La programación lineal adquiere gran relevancia a partir del año 1947 en que George B. Dantzig desarrolla un método de resolución para este tipo de problemas, denominado Método del Simplex.

$x \geq 0$, $y \geq 0$

Se llama Programación Lineal (PL) al conjunto de técnicas matemáticas que pretenden optimizar (maximizar o minimizar) una función objetivo, función lineal de varias variables, sujeta a una serie de restricciones, expresadas por inecuaciones lineales.

En un problema de programación lineal intervienen:

a) La función $f(x,y) = ax + by + c$ llamada función objetivo y que es necesario optimizar. En esa expresión x e y son las variables de decisión, mientras que a, b y c son constantes.

b) Las restricciones, que deben ser inecuaciones lineales. El carácter de desigualdad viene impuesto por las limitaciones, disponibilidades o necesidades, que son: inferiores a ... (menores: $<$ o $\leq$); como mínimo de ... (mayores: $>$ o $\geq$) . Tanto si se trata de maximizar como de minimizar, las desigualdades pueden darse en cualquiera de los dos sentidos.

c) Al conjunto de valores de x e y que verifican todas y cada una de las restricciones se lo denomina <u>conjunto (o región) factible</u>. Todo punto de ese conjunto puede ser solución del problema; todo punto no perteneciente a ese conjunto no puede ser solución.

d) La solución óptima del problema será un par de valores (x0, y0) del conjunto factible que haga que f(x,y) tome el valor máximo o mínimo.

La forma estándar de un PL es como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{Max } F(x) = c^t x \\ \text{s.a:}\quad &A x \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

la que es bastante general. En efecto, si se trata de minimizar:
a) puede maximizarse la función objetivo con signo negativo.
b) las restricciones $>$ pueden transformarse en $<$, multiplicándolas por -1
c) las restricciones = pueden escribirse como 2 restricciones $>=$ y $<=$

2. LA SOLUCION GRAFICA

Un problema de PL puede resolverse en forma gráfica, de un modo simple, si existen solamente 2 incógnitas, X e Y (2 dimensiones).

Ejemplo 2: Reddy Mikks Co. posee una pequeña fábrica de pinturas para interiores y exteriores de casas para su distribución al mayoreo. Se utilizan dos materiales básicos, A y B, para producir las pinturas. La disponibilidad máxima de A es de 6 toneladas diarias, y de B es de 8 toneladas diarias. La necesidad diaria de materia prima por tonelada de pintura se resume en la siguiente tabla.

	Toneladas de MP por Tonelada de Pintura		
	Exterior	Interior	Disponibilidad Máxima (Toneladas)
Materia Prima A	1	2	6
Materia Prima B	2	1	8

Un estudio de mercado ha establecido que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la de pintura para exteriores en más de 1 tonelada. Asimismo el estudio señala que la demanda máxima de pintura para interiores está limitada a dos toneladas diarias.

El precio al mayoreo por tonelada es \$3.000 para la pintura de exteriores y de \$2.000 para la pintura de interiores.

¿Cuánta pintura para exteriores e interiores debe producir l compañía todos los días para maximizar el ingreso bruto?

Máx. $F(x) = 3\,x1 + 2\,x2$

s.a.:

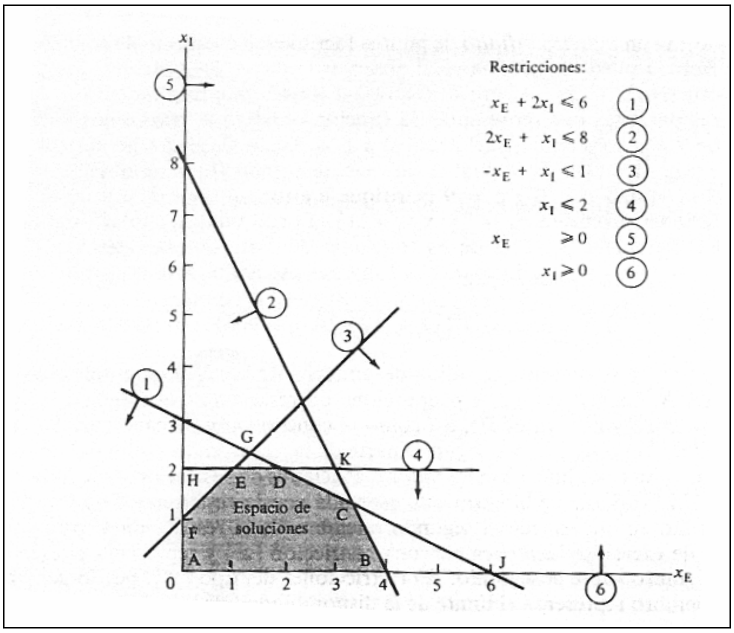
$x1 + 2\,x2 \leq 6$

$2\,x1 + x2 \leq 8$

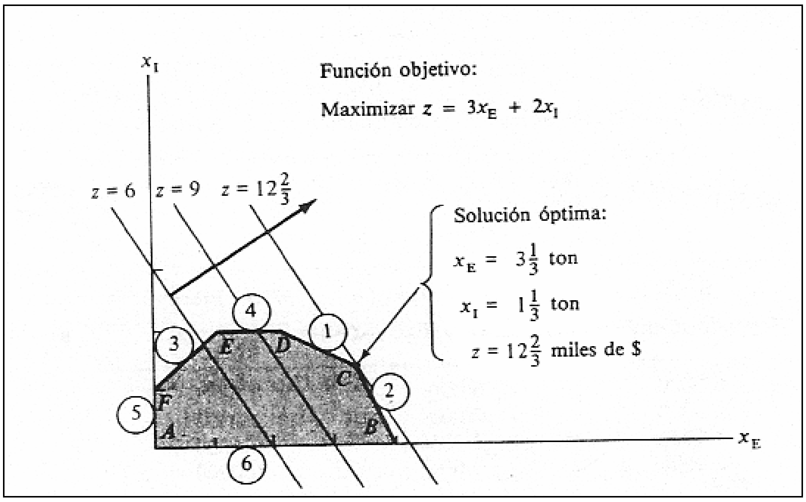
$-x1 + x2 \leq 1$

$x2 \leq 2$

$x1 \geq 0,\ x2 \geq 0$



Fuente: Taha (1995)



3. LA REGIÓN FACTIBLE

La solución de un problema de PL, en el supuesto de que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades, la que recibe el nombre de región factible (conjunto de soluciones factibles).

Teorema 1: Si la función objetivo alcanza un valor óptimo, dicho óptimo se obtiene siempre en un punto extremo de la región factible. Esto implica que la búsqueda de una solución óptima se limitará a un número finito de puntos, puesto que los puntos extremos (vértices) de un problema de PL son finitos.

Teorema 2: Si la función objetivo alcanza el óptimo en más de un punto extremo o frontera[2], entonces toma el mismo valor para todos los puntos del segmento lineal que los une.

Los sistemas de inecuaciones lineales pueden presentar varias opciones respecto a sus soluciones: puede no existir solución[3], y en el caso de que exista, el conjunto solución puede ser acotado o no.

---

[2] Puntos extremos son aquellos que tienen puntos adyacentes que pertenecen y otros puntos adyacentes que no pertenecen al conjunto.

[3] Por ejemplo el siguiente problema es no acotado, y no tiene solución:

Max $F(x) = x1$

s.a: $-x1 + x2 \leq 2$

$x2 \leq 4$

$x1 \geq 0$ $x2 \geq 0$

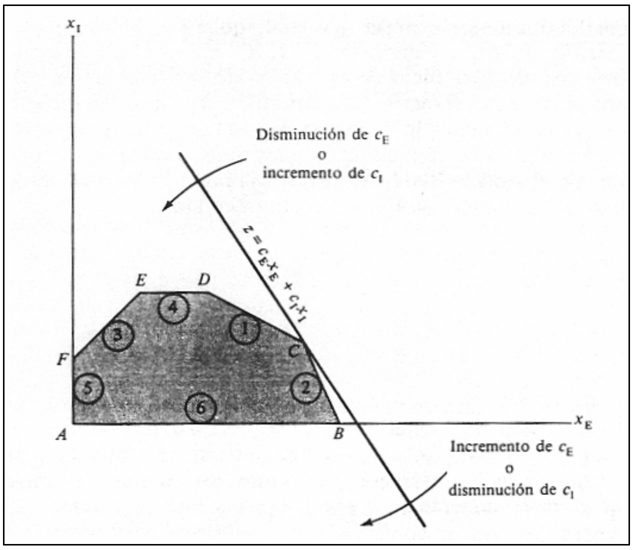
4. ANALISIS DE SENSIBILIDAD (Estática Comparativa)

El Análisis de Sensibilidad se utiliza para examinar los efectos de cambios en varias áreas diferenciadas del problema:

Se desea medir cuanto pueden variar algunos parámetros, sin que esto implique un cambio en la solución óptima (es decir en x1* y x2*):

a) Coeficientes de la F. O.

Los coeficientes de la función objetivo (coeficientes objetivo). Los cambios en los coeficientes objetivos NO afectan la forma de la región factible, por lo que no afectarán a la solución óptima (aunque sí al valor de la función objetivo).



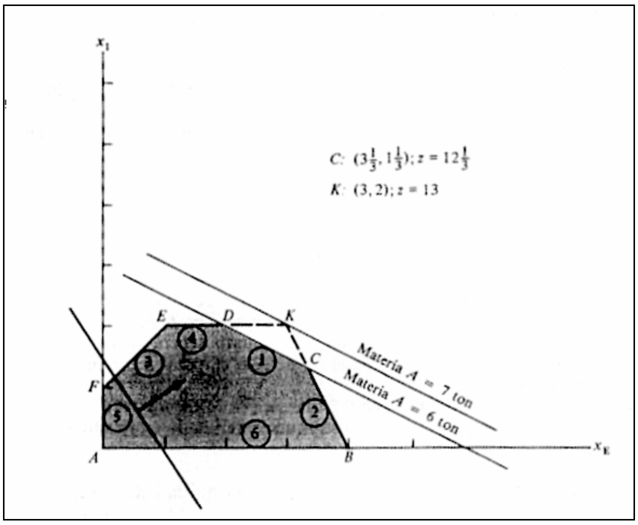
Puede mostrarse que los intervalos en los cuales puede variar el coeficiente de x1 en la FO, sin que cambie x1* y x2*, es (1,4), y para el caso de x2 es (1.5, 6).

Una forma simple de verificar esto considerar que la función objetivo tiene la forma Z=aX1 + 2X2, y deseamos encontrar cuál es el rango de valores de 'a' para los cuales x1 y X2 permanecen en sus valores óptimos originales, es decir x1 = 3 1/3, x2 = 1 1/3 (note que se asume que el segundo coeficiente de la F.O. permanece constante en 2). Para esto igualamos las pendientes de las ecuaciones de la restricción 1 y la ecuación de la FO: a/2=1/2, lo que implica que a=1. Para encontrar el límite superior de a, igualamos las pendientes de las ecuaciones de la restricción 2 y la ecuación de la FO: a/2=2, lo que implica que a=4.

Siguiendo igual para b, igualamos las pendientes de las ecuaciones de la restricción 1 y la ecuación de la FO: 3/b=1/2, lo que implica que b=6. Para encontrar el límite superior de b, igualamos las pendientes de las ecuaciones de la restricción 2 y la ecuación de la FO: 3/b=2, lo que implica que b=1,5.

b) Las cantidades de recursos disponibles (RHS)

Los recursos disponibles (los términos situados a la derecha de cada restricción). Intuitivamente (para 2 variables), los cambios en el RHS suponen desplazamientos paralelos de las rectas asociadas a las restricciones, lo cual hará variar la forma de la región factible y, con ello, a la solución óptima hasta cierto punto, a partir del cual será redundante.



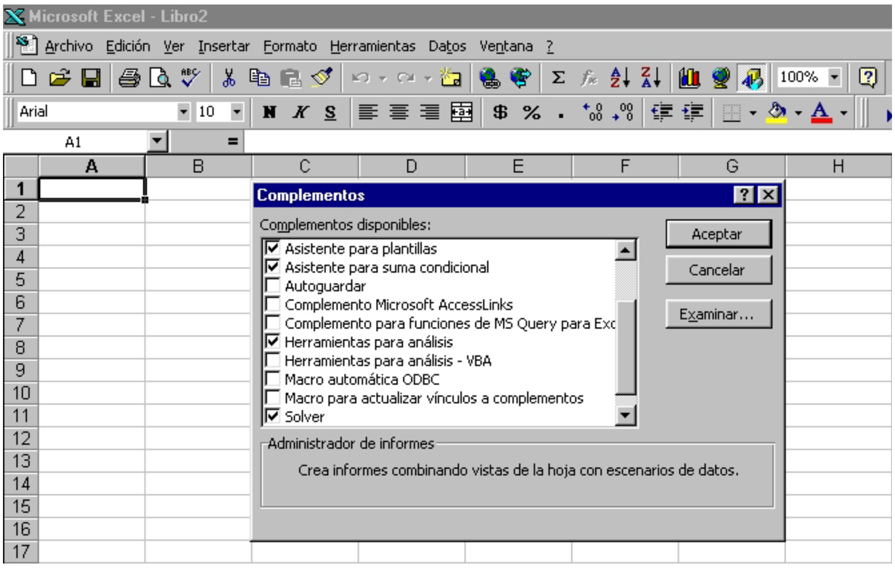
En el caso de la 1º restricción, RHS=6, y por cada unidad de aumento de RHS(1) la FO reaccionará a una tasa constante, pero solo dentro de un intervalo, y en este caso eso ocurre dentro del intervalo dado por el segmento BK, y la tarea es encontrar los límites de RHS para lo cual eso ocurre. Para obtener este rango basta sustituir como sigue en la restricción 1: 1(4)+2(0)=4 que corresponde al punto B, y 1(3)+2(2)=7 que corresponde al punto K. Es decir, 4<=RHS(1)<=7.

¿Cuál es la tasa a la cual cambia el valor de la FO al variar RHS(1) (dentro de los límites anteriores)? (13*-12*)/(7-4)=1/3, que corresponde a lo que se denomina **Precio Sombra**.

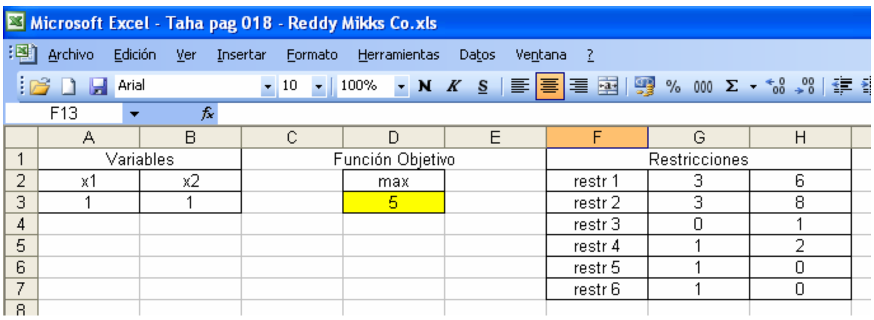
5. INTRODUCCION AL SOLVER DE EXCEL

'**Solver**' es una herramienta de <u>Excel</u> que permite la optimización en la asignación de recursos empleando Programación Lineal y No Lineal. Note que en Excel existe la función 'Buscar Objetivo', la que posee gran utilidad para resolver problemas que involucran un valor objetivo exacto y que depende de un único valor desconocido. Para los problemas más complejos se usa la función 'Solver', la que puede manejar problemas que involucran muchas variables y puede ayudar a encontrar las combinaciones de variables que maximice o minimice una celda objetivo. También permite especificar uno o más restricciones que deben cumplirse para que la solución sea ser válida.

Si no se encuentra este comando en el menú Herramientas, escoja Herramientas y allí Complementos, Solver. Si Solver no está en la lista, usted necesitará instalarlo ejecutando la instalación completa de Microsoft Excel.



Ejemplo: En el caso del ejemplo anterior, una formulación en Excel de las restricciones y la función objetivo se muestra a continuación.



Se podría solucionar este problema sustituyendo muchas alternativas hasta lograr una respuesta satisfactoria, manteniendo el cuidado de respetar las condicionantes antes definidas, y revisando el impacto de sus cambios en el gasto total. De hecho, eso es lo que Solver hará, pero mucho más rápido.

Para usar Solver, escoja el comando Solver del menú Herramientas. Para definir los parámetros de Solver se deben completar tres secciones: su objetivo (de acuerdo al ejemplo sería minimizar el gasto total), sus variables o celdas de cambio (en el ej. sería el número de anuncios que se pondrán en cada publicación), y sus restricciones o limitantes que en el problema se plantean.

5.1. Especificando el Objetivo

En la sección 'Celda objetivo', se indica la meta u objetivo a lograr. En este ejemplo, usted quiere minimizar el costo total, lo que a su vez se complementa en la sección 'Valor de la celda objetivo' que en el ejemplo es Mínimo la elección.

Se puede indicar el lugar en donde está definida la función objetivo ya sea 1) indicando las coordenadas de una celda, 2) o tecleando un nombre que se ha asignado a una celda, o 3) buscando y seleccionando la celda directamente en la hoja de cálculo. Si se asigna un nombre a la celda objetivo, Solver lo utilizará en sus informes aun cuando se especifica las coordenadas de la celda en lugar de su nombre en la sección 'Celda Objetivo'. Si no se especifica nombres para las celdas, en los informes de Solver se incluirán nombres basados en los títulos de la columna más cercana y en el texto que encabeza la fila, pero estos nombres no aparecen en las secciones de la función Solver. Para tener mayor claridad al leer los resultados, es una buena idea nombrar todas las celdas importantes de su modelo antes de ejecutar Solver.

En este ejemplo se quiere que Solver determine en la celda objetivo el menor valor posible, para lo que se selecciona Min. O se podría querer que Solver encontrara algún valor particular de la celda objetivo[4], en dicho caso se seleccionaría en 'Valores de' la cantidad o una celda de referencia.

[4] Note que seleccionando la opción Valores de, y considerando sólo una celda como variable de cambio, sin especificar restricciones, se puede usar Solver como la función 'Buscar objetivo'.

Si se deja la Celda objetivo en blanco, pulsando el botón Opciones, y se selecciona la opción 'Mostrar resultado de Iteraciones', se puede visualizar paso a paso las combinaciones o iteraciones de celdas de cambio en relación a las restricciones, y se podrá conseguir una respuesta que respete las restricciones, pero no necesariamente sea la solución óptima.

5.2. Especificando las Celdas de Cambio (Variables de cambio)

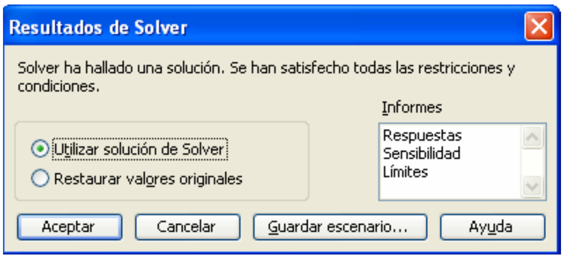
Las celdas de cambio se señalan en la sección 'Cambiando las Celdas'. En el ejemplo estas celdas quedan en el rango D2:D7. Si las variables no están en celdas adyacentes, se puede separar las celdas de cambio (o rangos) con comas (si se selecciona celdas no adyacentes, mantenga presionada la tecla Ctrl mientras selecciona cada celda o rango). Si se especifica una celda objetivo (tal como lo hace en la mayoría de los casos), se debe especificar celdas de cambio que estén vinculadas; es decir, celdas que en la fórmula de la celda objetivo dependen en forma prioritaria en su cálculo. Si el valor de la celda objetivo no depende de las variables, Solver no podrá resolver nada.

5.3. Definiendo las Restricciones

Para especificar una restricción, pulse el botón 'Agregar…' en los Parámetros de Solver. La figura muestra en cómo se expresa la restricción que el valor en celda G2 en el modelo debe ser menor o igual que el valor en celda H2. Como puede ver, una restricción consiste de tres componentes: una celda de referencia, un operador de la comparación, y un valor de restricción.

Después de especificar una restricción de esta manera, se puede pulsar el botón Aceptar para volver a los Parámetros de Solver, o pulsar el botón Agregar para especificar otra restricción. La figura muestra todos los Parámetros de Solver definidos. Note que las restricciones se listan en orden alfabético, no necesariamente en el orden en el que usted las definió.

Después de completar los Parámetros de Solver, pulse el botón Resolver. En la medida que Solver trabaja, aparecen mensajes en la barra de estado. Solver determina valores por ensayo en las celdas de cambio, recalcula la planilla, y entonces prueba los resultados. Comparando el resultado de cada iteración con el de la iteración predecesora, Solver determina el conjunto de valores que satisfagan el objetivo así como las restricciones. En el ejemplo, Solver tiene éxito encontrando un valor óptimo para la celda objetivo considerando todas las restricciones, desplegando el mensaje mostrado en Figura siguiente.



Los valores desplegados en la planilla de cálculo en ese momento producen la solución óptima. Se puede dejar estos valores en la planilla de cálculo seleccionando Aceptar, o se puede restaurar los valores que sus variables tenían antes de que usted activara Solver pulsando el botón Cancelar o seleccionando Restaurar Valores Originales y luego Aceptar. También se tiene la opción de asignar los valores de la solución a un escenario determinado.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Variables			Función Objetivo		Restricciones		
2	x1	x2		max		restr 1	6	6
3	3,33333333	1,33333333		12,6666667		restr 2	8	8
4						restr 3	-2	1
5						restr 4	1,33333333	2
6						restr 5	3,33333333	0
7						restr 6	1,33333333	0

Se puede obtener un resultado entero de dos maneras: redondeando, o agregando nuevos restricciones que obliguen a los resultados a adoptar números enteros.

5.4. Guardando y Re Utilizando los Parámetros de Solver

Cuando se guarda un libro de trabajo después de usar el Solver, todos los valores que utilizó en los Parámetros de Solver se graban junto con sus datos de la planilla de cálculo. No se necesita especificar nuevamente el problema si quiere continuar trabajando con él durante una sesión posterior de Excel.

Para guardar más de un set de parámetros de Solver con una hoja de cálculo dada, se debe usar la opción de Guardar Modelo. Elija Solver del menú de Herramientas. Presione el botón Opciones, entonces en las Opciones de Solver pulse el botón Guardar Modelo. Excel sugiere una celda en donde guardar los parámetros de Solver en la hoja de cálculo. Especificar una celda vacía o teclear su referencia y entonces pulsar el botón Aceptar. Si usted especifica una sola celda, Solver pega en un rango el modelo, empezando en la celda indicada e inserta fórmulas en tantas celdas debajo de él como sea necesario. (Esté seguro que las celdas debajo de la celda indicada no contienen datos). Si se especifica un rango, Solver llena sólo las celdas especificadas de los parámetros del modelo. Para reutilizar los parámetros guardados, pulse el botón Opciones en los

Parámetros de Solver, pulse el botón a Cargar Modelo, y entonces especifique el rango en el que usted guardó los parámetros de Solver.

Una mejor manera de guardar sus parámetros de Solver es salvarlos como un Escenario empleando 'Guardar Escenarios'. Como se podría haber notado, el mensaje de Resultados de Solver incluye la opción Guardar Escenario. Pulsando este botón se activa el Administrador de Escenarios y le permite asignar un nombre al escenario junto con los valores actuales de sus celdas de cambio. Esta opción proporciona una manera excelente para explorar y realizar un análisis posterior en una variedad de posibles resultados (Herramientas -> Escenarios).

5.5. Otras Opciones de Solver

Las Opciones de Solver mostradas contienen varias alternativas que podrían necesitar alguna explicación.

- Con el Tiempo y las Iteraciones, se le indica a Solver cuan duro trabajar en la solución. Si Solver alcanza el tiempo límite o el número límite de iteraciones antes de encontrar una solución, el cálculo se detiene y Excel le pregunta si usted quiere continuar. Las opciones pre definidas son normalmente suficientes para resolver la mayoría de los problemas, pero si no se alcanza una solución con estas opciones, se puede probar ajustándolas.

- La opción Precisión es usada por Solver para determinar lo cercano que se quiere que los valores en las celdas en donde se ha definido la restricción tenga con los límites impuestos en dicha restricción. El valor máximo es 1, lo que representa la precisión más baja. Especificando un valor menor que la cifra por defecto 0,000001, origina mayores tiempos en lograr la solución.

- La opción Tolerancia sólo se aplica a problemas que usan restricción para números enteros y representa un porcentaje de error permitido en la solución.

- Las opciones 'Estimación', 'Derivadas', y 'Hallar por' quedan mejor en su elección predefinidas, a menos que usted entienda técnicas de optimización lineal. Si usted quiere más información sobre estas opciones, remítase a la ayuda en línea de Excel.

5.6. La Opción Adoptar Modelo Lineal

Solver puede manejar problemas de PL y no lineales. Puede resolver problemas lineales más rápidamente si se selecciona en la opción 'Adoptar Modelo Lineal'. Si se selecciona esta opción para un problema no lineal, Solver despliega un mensaje 'No se Satisfa'cen Las Condiciones Para Adoptar un Modelo Lineal'. Si se selecciona 'Adoptar un Modelo Lineal' y entonces elige la opción de Informe de Sensibilidad, Solver produce un Informe de Sensibilidad en una forma diferente que para los problemas no lineales.

6. SOLVER: GENERANDO INFORMES

Solver genera tres informes: Respuestas, Sensibilidad, y Límites. Seleccione los informes que usted quiere y entonces pulsa el botón Aceptar. (Empleando la tecla Ctrl podrá seleccionar más de uno). Cada informe se guarda en una hoja separada en el libro de trabajo actual, con la etiqueta identificada con el nombre del informe.

6.1. El Informe de Respuestas

El informe de Respuesta lista la celda objetivo, las celdas de cambio, y las restricciones. Este informe también incluye información sobre el estado del valor de holgura[5] (divergencia o Slack) para cada restricción. Los estados pueden ser Opcional, Obligatorio o No Satisfecho. El valor de holgura es la diferencia entre el valor de la solución de las celdas de restricción y el número que aparece en el lado derecho de la fórmula de restricción. Una restricción Obligatoria es una para el que el valor de holgura es 0.

Microsoft Excel 11.0 Informe de respuestas
Hoja de cálculo: [Taha pag 018 - Reddy Mikks Co.xls]datos
Informe creado: 11-03-2004 22:39:11

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$3	max	5	12,66666667

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$A$3	x1	1	3,333333333
$B$3	x2	1	1,333333333

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$G$2	restr 1	6	$G$2<=$H$2	Obligatorio	0
$G$3	restr 2	8	$G$3<=$H$3	Obligatorio	0
$G$4	restr 3	-2	$G$4<=$H$4	Opcional	3
$G$5	restr 4	1,333333333	$G$5<=$H$5	Opcional	0,666666667
$A$3	x1	3,333333333	$A$3>=$H$6	Opcional	3,333333333
$B$3	x2	1,333333333	$B$3>=$H$7	Opcional	1,333333333

[5] Holguras (Slack): Existen algunas restricciones que serán redundantes. En este caso se dice que los recursos a los que se refieren esas restricciones son 'abundantes', es decir poseen holgura. Esto es de utilidad para un problema de maximización de utilidad, pues permite saber cuales recursos deben ser prioritarios al momento de asignarles recursos adicionales.

6.2. El Informe de Sensibilidad para un Modelo Lineal

El informe de Sensibilidad proporciona información sobre cuán sensible es la celda objetivo a los cambios en sus restricciones[6]. Este informe tiene dos secciones: uno para las celdas de cambio y uno para las restricciones. La columna derecha en cada sección proporciona la información de sensibilidad. Note que las frases "shadow price" y "opportunity cost" tienen diferentes significados en PL y en la literatura económica.

Celdas cambiantes:

- Aumento y Disminución Permisible muestran la cantidad que cada Coeficiente de la FO debe cambiar antes de que las celdas cambiantes sean afectadas (en la solución óptima).

- La columna del Costo (Gradiente) Reducido (Costo de Oportunidad[7]) muestra la 'degradación o empeoramiento' del óptimo por la introducción de 1 unidad de variable non-optima en la respuesta. Muestra el monto por el cual un coeficiente de la FO necesita cambiar para que la variable aparezca (tenga un valor distinto de cero) en la solución óptima. Si el costo reducido es positivo, no se tendrá una ganancia en producir x.

Microsoft Excel 11.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [Taha pag 018 - Reddy Mikks Co.xls]datos
Informe creado: 11-03-2004 22:39:12

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Aumento permisible
$A$3	x1	3,333333333	0	3	1	2
$B$3	x2	1,333333333	0	2	4	0,5

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Aumento permisible
$G$2	restr 1	6	0,333333333	6	1	2
$G$3	restr 2	8	1,333333333	8	4	2
$G$4	restr 3	-2	0	1	1E+30	3
$G$5	restr 4	1,333333333	0	2	1E+30	0,666666667

[6] Si usted selecciona Modelo No Lineal en las Opciones, el informe de Sensibilidad no incluye varias columnas de información.

[7] Illustration of Opportunity Cost: What happens when forced to use a non-optimal decision variable?
Example: Min Cost = 2X1 + 10X2 + 20 X3
s.t. X1 + X2 + X3 > 3; X2 > 1; X1 , X2 , X3 > 0
• X* = (2, 1, 0); cost* = 14 ; Costo reducido: (0, 8, 18)
• If forced to use X3, new X* = (1,1,1); new cost* = 32 Thus: (opportunity cost '3') = dZ*/1 = 18

Para las restricciones

- El Aumento y la Disminución Permisible muestran la cantidad que el valor de RHS debe cambiar antes de las celdas cambiantes sean afectadas (en la solución óptima).

- La columna de Precio Sombra indica el aumento en el valor de la FO por cada unidad que se incrementa el Lado Derecho de la Restricción (RHS).

Importante: Los informes de sensibilidad no pueden trabajar con celdas combinadas en la hoja de cálculo que esta optimizando. Si ejecuta un informe de sensibilidad y aparece con los precios sombra en blanco puede deberse a las celdas combinadas en la hoja de cálculo. Las celdas combinadas afectan a la capacidad de Solver de asignar etiquetas a los informes. Para eliminar estas celdas de los informes, siga los pasos siguientes: seleccione todas las celdas de la hoja de cálculo, vaya al menú Formato y seleccione Celdas, haga clic en la pestaña Alineación y verifique que no está seleccionada la casilla Combinar celdas.

6.3. El Informe de Límites

El informe de Límites dice cuánto pueden aumentar o disminuirse los valores de sus celdas de cambio sin transgredir las restricciones del problema. Para cada celda de cambio, este informe lista el valor óptimo así como los valores más bajos y más altos que pueden usarse sin violar la restricción.

Microsoft Excel 11.0 Informe de límites
Hoja de cálculo: [Taha pag 018 - Reddy Mikks Co.xls]Informe de límites 1
Informe creado: 11-03-2004 22:39:12

	Celda objetivo	
Celda	Nombre	Igual
$D$3	max	12,66666667

	Celdas cambiantes		Límite	Celda	Límite	Celda
Celda	Nombre	Igual	inferior	objetivo	superior	objetivo
$A$3	x1	3,333333333	0,333333333	3,666666667	3,333333333	12,66666667
$B$3	x2	1,333333333	0	10	1,333333333	12,66666667

7. DUALIDAD

A cada PL en las variables x1, x2,...xn le corresponde otro PL en las variables y1, y2,...ym (llamadas variables duales o precio sombra[8]) tales que los valores óptimos de ambas FO son siempre idénticos, y podemos trabajar con el más sencillo de los dos.

Sea
xj = las variables de elección
ci = precios
ri = cantidad total del i-esimo recurso fijo disponible para la empresa.

Problema Primal	Problema Dual
Maximizar $\pi = c_1x_1 + c_2x_2$ *sujeto a* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ *y* $x_1, x_2 \geq 0$	*Minimizar* $\pi^* = r_1y_1 + r_2y_2$ *sujeto a* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ *y* $y_1, y_2 \geq 0$
Maximizar $\pi = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3$ *sujeto a* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 12 \\ 42 \end{bmatrix}$ *y* $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	*Minimizar* $\pi^* = 12y_1 + 42y_2$ *sujeto a* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ *y* $y_1, y_2 \geq 0$

Teorema 1: Si existe una solución óptima finita para uno de los sistemas, existe entonces una solución finita para el otro. Si existen soluciones factibles para ambos sistemas, existen soluciones finitas óptimas para ambas.

Teorema 2: El valor óptimo de una variable en un sistema será nulo si la restricción correspondiente en el otro sistema se satisface con estricta desigualdad, y será no negativo si la restricción correspondiente se satisface con igualdad.

Teorema 3: Si el valor óptimo de una variable en un sistema es positivo, los valores óptimos de las variables del otro sistema satisfacen la restricción correspondiente con igualdad.

Teorema 4: Los valores óptimos de las FO de los dos sistemas de programación son iguales.

[8] Se interpreta aquí como costo de oportunidad (sin ser precio de mercado).

7.1. INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DEL DUAL

a) Maximización de la Utilidad: Suponga que una empresa produce 2 mercaderías X e Y, y que tiene a su disposición 8 unidades de trabajo L, 5 unidades de capital K, y 3 unidades de materia prima R. Supóngase que cada unidad de producción X requiere 1L, 1K y 1R, y que cada unidad de producción de Y requiere 2L y 1K y ningún R. La empresa gana $15 en cada unidad de X que vende y $10 en cada unidad de Y que vende. Se toman los ingresos totales como ganancias totales (no existen costos fijos). Lo que se desea saber es cuántas unidades de X y de Y se producen óptimamente.

Max U = 15X + 10 Y
SA
X + 2Y <= 8 (unidades de L)
X + Y <= 5 (unidades de K)
X <= 3 (unidades de R)
X, Y >=0

La solución óptima es X=3 y Y=2, con U=$65. Se utiliza completamente K y R, pero sobra 1 unidad de L.

En este problema se especifican precios de venta (15 y 10), y la empresa puede disponer de cantidades determinadas de insumos L, K y R, los que no está comprando. Se conocen los precios de producción, pero no los precios de los insumos.

b) Minimización del Costo: Suponga que una cooperativa (coop) desea que la empresa le entregue por un cierto periodo las unidades de L, K y R a cambio de una oferta por un 'paquete' que garantice un precio de renta por los recursos usados. ¿Qué precio debe ofrecer la cooperativa a la empresa que le sea igualmente atractivo?

La función objetivo de la coop es encontrar el mínimo costo total por el uso de los recursos:

$C = 8P_L + 5P_K + 3P_R$

requiriendo que la coop lo haga a lo menos tan bien como actualmente lo hace la empresa en el uso del trabajo, el capital y las materias primas. Luego:

a) el ingreso a generar por la coop por 1 unidad de X debe ser >= el ingreso generado actualmente por la empresa por 1 unidad de X: PL + PK + PR debe ser >= 15

b) el ingreso a generar por la coop por 1 unidad de Y debe ser >= el ingreso generado actualmente por la empresa por 1 unidad de Y: $2P_L + P_K$ debe ser >= 10.

Puesto que habían unidades excedentes de L, su precio sombra es P_L=0, es decir no es escaso. Con esto puede reescribirse el problema anterior en 2 dimensiones como uno de minimización de costos con requisitos de producción mínimos:

Min C = $5P_K + 3P_R$
SA
$P_K + P_R >= 15$
$P_K >= 10$
$P_K, P_R >= 0$

La solución es P_K =10, P_R =5, y C=$65. Se puede verificar que si K aumenta en 1u, U aumentará en $10, y que si se aumenta R en 1u, U aumentará en $5.

La correspondencia entre primal y dual sugiere que maximizar el beneficio, hallando los niveles óptimos de producción (el problema primal), es equivalente a minimizar el valor total imputado o el costo de oportunidad de los recursos de la empresa, con la condición de que el costo de oportunidad de producción de cada producto no puede ser menor que el beneficio bruto del mismo.

Los Precios Sombra representan en cuanto aumenta la FO al aumentar a capacidad disponible en 1 u en la restricción correspondiente (ceteris paribus), y miden la sensibilidad del valor óptimo de la FO primal ente cambios en las constantes de las restricciones primales. En el óptimo, los Precios Sombra juegan el mismo papel que los Multiplicadores de Lagrange en optimización clásica.

$$\lambda \approx y_1 = \frac{\partial \pi}{\partial r_1}$$

7.2. OTRO EJEMPLO DE DUALIDAD:

Suponga que la Fabrica 1 tiene el siguiente problema de producción:

Max $3x1 + 5x2$
s.t. $x1 <= 4$
$2x2 <= 12$
$3x1 + 2x2 <= 18$
$x1, x2 >= 0$

Supongamos que la administración de la Fábrica 2 decide comprar los materiales en la Fábrica 1. ¿Cuál es el precio justo por los tres materiales?

El monto que la Fab 2 paga = $4y1 + 12y2 + 18y3$

Por supuesto la Fab 2 quiere pagar tan poco como sea posible. Su meta es:

Min $4y1 + 12y2 + 18y3$

Sin embargo los precios deben satisfacer, es decir lo que la Fab 1 quiere vender. La Fab 1 busca que si tiene 1 u de material 1 y 3 u de material 3, puede producir una u de producto 1 por un precio con un beneficio = $3. Así, para satisfacer la Fab 1, la Fab 2 cubrirá la pérdida en el prod 1 en la Fab 1 debido a la venta:

$$y1 + 3y3 >= 3$$

Lo mismo es verdadero para el prod 2 en la Fab 1:

$$2y2 + 2y3 >=5$$

Finalmente, la Fab 2 enfrenta el problema óptimo de valoración:

min $4y1 + 12 \quad y2 + 18y3$
s.t. $y1 + 3y3 >= 3$
$2y2 + 2y3 >= 5$
$y1, y2, y3 >= 0$

lo que entrega los precios justos ('fair prices') en el sentido de que los precios que entregan el pago mínimo de liquidación aceptable.

7.3. EJERCICIO DE ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD Y DUALIDAD (Davis-McKeown pag 214)

La Altamont Metalworks es una compañía pequeña que se especializa en la fabricación de aleaciones para la industria aeroespacial. En tiempos recientes ganó un contrato para proveer 2000 libras de una aleación a un precio de $105 la libra. La aleación debe incluir aluminio, cobre, magnesio y níquel. La compañía que compra la aleación ha asignado requerimientos al contenido del producto final, según se muestran a continuación:

1. Cobre a lo menos un 15%
2. Magnesio a lo menos un 2% pero no más de 3%
3. Níquel a lo menos un 20%
4. Impurezas no más del 1.5%
5. Aluminio el resto de la aleación

La empresa dispone de 5 metales básicos que pueden mezclarse para fabricar el producto final requerido. Los costos y la composición de los materiales básicos se muestran a continuación.

Metal	Costo por libra ($)	Porcentaje cobre	Porcentaje Magnesio	Porcentaje Níquel	Porcent. impurezas
Z10	45	12	3	3	2
Z20	82	24	2	65	1
Z30	73	8	1	55	2
Z40	35	4	2	15	3
Z50	95	15	3	75	1

Debido a la escasez del material Z20, la empresa no puede utilizar más de 600 libras de él para fabricar la aleación.

Al mismo tiempo que los administradores están interesados en determinar la mezcla de producción de materiales básicos que proporcione las mayores utilidades, también les interesa conocer el efecto de diversos cambios posibles en los valores de las utilidades y los requerimientos de composición.

-¿cómo afectaría a la decisión de producción disminuir el costo por libra del Z30 en $5?

-¿cómo afectaría una restricción severa sobre las impurezas (de magnitud desconocida) las decisiones de producción?

-Si la disponibilidad del Z20 pudiera aumentarse pagando $10 adicionales por tonelada, ¿debería la empresa usar cantidades adicionales de este material?

SOLUCION:

Sean: X1 la cantidad de Z10 que se usa, X2 la cantidad de Z20, etc.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		x1	x2	x3	x4	x5		RHS	
2		1000	600	0	0	400			
3									
4									
5	max	60	23	32	70	10			
6	Constraint 1:	0,12	0,24	0,08	0,04	0,15	>=	300	(0.15*2000)
7	Constraint 2:	0,03	0,02	0,01	0,02	0,03	>=	40	
8	Constraint 3:	0,03	0,02	0,01	0,02	0,03	<=	60	
9	Constraint 4:	0,03	0,65	0,55	0,15	0,75	>=	400	
10	Constraint 5:	0,02	0,01	0,02	0,03	0,01	<=	30	(0.015*2000)
11	Constraint 6:	0	1	0	0	0	<=	600	
12	Constraint 7:	1	1	1	1	1	=	2000	
13									
14									
15									
16	max	60000	13800	0	0	4000	77800		
17	Constraint 1:	120	144	0	0	60	324	>=	300
18	Constraint 2:	30	12	0	0	12	54	>=	40
19	Constraint 3:	30	12	0	0	12	54	<=	60
20	Constraint 4:	30	390	0	0	300	720	>=	400
21	Constraint 5:	20	6	0	0	4	30	<=	30
22	Constraint 6:	0	600	0	0	0	600	<=	600
23	Constraint 7:	1000	600	0	0	400	2000	=	2000

Microsoft Excel 11.0 Informe de respuestas
Hoja de cálculo: [DAVIS. 214.xls]Data
Informe creado: 15-04-2004 1:21:11

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$G$16	max =	77800	77800

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$2	x1	1000	1000
$C$2	x2	600	600
$D$2	x3	0	0
$E$2	x4	0	0
$F$2	x5	400	400

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$G$17	Constraint 1: =	324	$G$17>=$I$17	Opcional	24
$G$18	Constraint 2: =	54	$G$18>=$I$18	Opcional	14
$G$19	Constraint 3: =	54	$G$19<=$I$19	Opcional	6
$G$20	Constraint 4: =	720	$G$20>=$I$20	Opcional	320
$G$21	Constraint 5: =	30	$G$21<=$I$21	Obligatorio	0
$G$22	Constraint 6: =	600	$G$22<=$I$22	Obligatorio	0
$G$23	Constraint 7: =	2000	$G$23=$I$23	Opcional	0

Microsoft Excel 11.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [DAVIS. 214.xls]Data
Informe creado: 15-04-2004 1:21:12

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminucion permisible		
$B$2	x1	1000	0	60	7,31652E+12	20	40	7,31652E+12
$C$2	x2	600	0	23	1E+30	13	10	1E+30
$D$2	x3	0	-28	32	28	1E+30	-1E+30	60
$E$2	x4	0	-40	70	40	1E+30	-1E+30	110
$F$2	x5	400	0	10	13	7,03825E+12	-7,0382E+12	23

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminucion permisible		
$G$17	Constraint 1: =	324	0	300	24	1E+30	-1E+30	324
$G$18	Constraint 2: =	54	0	40	14	1E+30	-1E+30	54
$G$19	Constraint 3: =	54	0	60	1E+30	6	54	1E+30
$G$20	Constraint 4: =	720	0	400	320	1E+30	-1E+30	720
$G$21	Constraint 5: =	30	5000	30	4	10	20	34
$G$22	Constraint 6: =	600	13	600	400	266,6666667	333,333333	1000
$G$23	Constraint 7: =	2000	-40	2000	200	133,3333333	1866,66667	2200

8. LIMITACIONES DEL MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

MODELO DETERMINÍSTICO: El modelo de PL involucra únicamente tres tipos de parámetros: Cj, aij y bi; de ahí su sencillez y gran aplicación. Sin embargo, el valor de dichos parámetros debe ser conocido y constante. Cuando el valor de los parámetros tiene un cierto riesgo o incertidumbre, pude utilizarse la programación paramédica, la programación estocástica, o realizarse un análisis de sensibilidad.

MODELO ESTÁTICO: En algunos modelos matemáticos se han empleado con éxito las ecuaciones diferenciales, para inducir la variable tiempo en ellos. En este sentido, puede decidirse que la PL utiliza un modelo estático, ya que la variable tiempo no se involucra formalmente. Adquiriendo un poco de experiencia en la formulación de modelos de PL, puede imbuirse la temporabilidad mencionada, con el uso de subíndices en las variables.

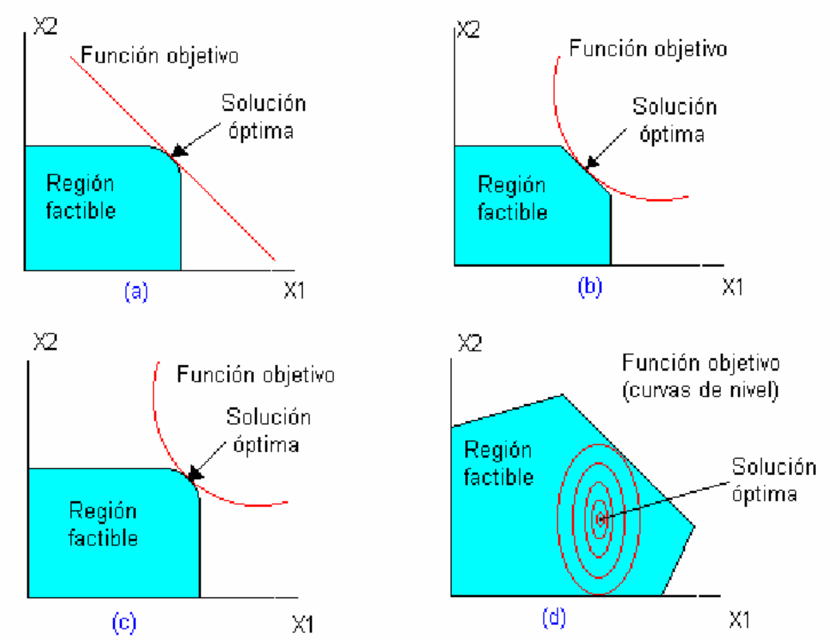
MODELO QUE NO SUBOPTIMIZA: Debido a la forma que se plantea el modelo de PL, o encuentra la solución óptima o declara que ésta no existe. Cuando no es posible obtener una solución óptima y se debe obtener alguna, se recurre a otra técnica más avanzada que la PL, la cual se denomina programación lineal por metas.

3. OPTIMIZACION NO LINEAL

3.1. INTRODUCCIÓN

Hasta en momento, hemos visto problemas en los que la función objetivo y las restricciones son lineales, pero hay casos que no responden a ésta categoría y se llaman problemas de programación no lineal o NLP (del inglés nonlinear programming). La principal diferencia entre los problemas NLP y LP es que en los primeros, la función objetivo y/o una o todas las restricciones son no lineales. Así pueden darse los siguientes casos:

- En la figura (a), la función objetivo es lineal, pero el borde de la zona factible, no.
- En la figura (b), el borde de la zona factible (por lo tanto las restricciones) es lineal, pero las curvas de nivel de la función objetivo no lo son.
- En la figura (c), tanto la función objetivo como una de las restricciones son curvas
- En la figura (d) la zona factible está limitada por líneas rectas y las curvas de nivel se concentran sobre la solución óptima "dentro" de la zona factible.

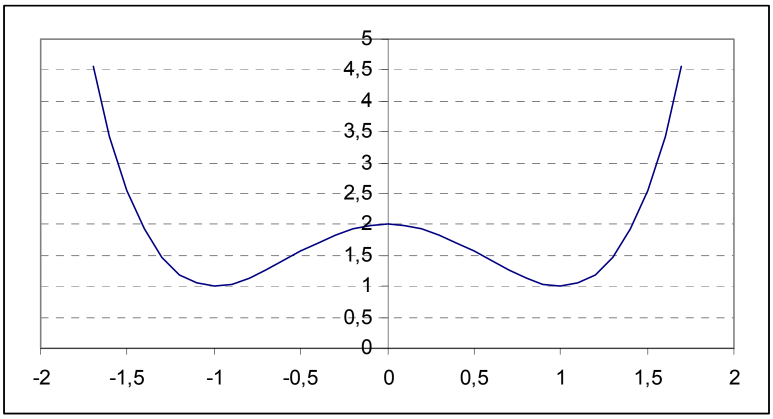


Aquí puede verse bien la diferencia entre los problemas LP en donde la solución factible estaba siempre en un vértice, mientras que en los casos NLP pueden estar sobre un borde curvo, recto o dentro de la zona factible.

A modo de ilustración de la problemática de la programación no lineal, véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Encontrar el mínimo del polinomio $Y = X^4 - 2X^2 + 2$.

Puede mostrarse a través de un gráfico de la función en el rango –2.0<x<+2.0, que existen 2 mínimos locales, uno en –1.0 y otro en +1.0.



a) Los valores iniciales de búsqueda pueden ser críticos en la PNL. Si se comienza buscando con -1,5 en Solver, se llega a x=-1, y si se comienza buscando con +1,5 en Solver, se llega a x=+1.

b) El óptimo estará donde se cumpla la condición de 1º orden (derivada igual a cero). Pueden haber muchos puntos que cumplan este requisito: X=-1, X=+1, X=0. Se tiene el riesgo de obtener una solución que no cumpla la condición de 2º orden, por ejemplo si se parte buscando con x=0.

c) Es posible obtener un óptimo local y no global, a diferencia de la PL. Si es posible, estudie la Función Objetivo. Alternativamente, debe apoyarse en lo rangos teóricos para limitar los valores iniciales de búsqueda.

Así, para las funciones complejas y tienen un gran número de óptimos locales, y los algoritmos de iteración nos arrojan solamente algunos de ellos, dependiendo de los valores iniciales de búsqueda que entreguemos, en circunstancias que puede existir alguno óptimo local superior, posible de encontrar indicando valores de búsqueda distintos.

Nota: Sea la condición (5A+3B) / (A+B) <= 2, donde A y B son las variables de las celdas cambiantes, es una restricción no lineal. Sin embargo, reformulando: 5A + 3B <= 2(A + B), que equivale a 3A + B <= 0, se elimina el problema de la no linealidad.

Nota: Tenga en cuenta que quizás sólo pueda consultar como máximo 16 variables de restricción dentro del cuadro de diálogo de celdas cambiantes de Solver.

3.2. APLICACIÓN: MINIMIZAR LA SUMA CUADRADOS DE ERRORES

En econometría, la búsqueda de los coeficientes estimados de un modelo de regresión generalmente requiere minimizar la suma cuadrada de errores, por lo que ésta es la función objetivo.

Ejemplo 1: Ajustar las siguientes observaciones de Y y X a una recta (Y=A+BX).

Y	X
10	5
20	7
30	4
40	9

Sabemos que encontrar el mejor ajuste debemos minimizar la distancia entre los datos de Y observados y los datos de Y predichos por el modelo, es decir minimizar la suma cuadrada de errores:

$$\underset{\{A,B\}}{MIN} \quad SCErr = \sum_{i=1}^{i=4} \left(Y_i - A - B \cdot X_i\right)^2$$

Calculando la Suma Cuadrada de Errores en función de las celdas debajo de a y de b, y luego ejecutando Solver se tiene que la solución que minimiza la Función Objetivo es intercepto a=5,9322, y pendiente b=3,0508. Ambos resultados deben coincidir con los resultados de una estimación en Excel de Herramientas->Análisis de Datos-> Regresion.

Y	X	ERROR	ERROR^2
10	5	-11,1864443	125,136537
20	7	-7,28813521	53,1169148
30	4	11,8644011	140,764013
40	9	6,61017393	43,6943994
			362,711864
a	b		
5,9322172	3,05084543		

Ejemplo 2: En el ejemplo anterior, ajuste los datos al siguiente modelo: $Y = A + B^2 Log(X)$

Y	X	ERROR	ERROR^2
10	5	-12,2642634	150,412156
20	7	-7,5159267	56,4891541
30	4	11,2185643	125,856184
40	9	8,56155423	73,3002109
			406,057705
a	b		
-2,85586583	5,99489616		

Ejemplo 3: Encontrar el valor de beta que ajusta mejor la ecuación $Y = \beta X_1 + \beta^2 X_2 + \varepsilon$ a las observaciones que siguen.

INFORMACIÓN SIMULADA DE Y(X1,X2)

OBS	Y	X1	X2
1	3.284	0.286	0.645
2	3.149	0.973	0.585
3	2.877	0.384	0.310
4	-0.467	0.276	0.058
5	1.211	0.973	0.455
6	1.389	0.543	0.779
7	1.145	0.957	0.259
8	2.321	0.948	0.202
9	0.998	0.543	0.028
10	0.379	0.797	0.099
11	1.106	0.936	0.142
12	0.428	0.889	0.296
13	0.011	0.006	0.175
14	1.179	0.828	0.180
15	1.858	0.399	0.842
16	0.388	0.617	0.039
17	0.651	0.939	0.103
18	0.593	0.784	0.620
19	0.046	0.072	0.158
20	1.152	0.889	0.704

Si se comienza buscar con B=-3,0, se obtendrá B=-2.029504395, sin embargo al variar el valor de búsqueda inicial de B=-3.0 a B=1.0 se tiene un resultado distinto, B= 1.1612060547

Luego, puesto que se tienen dos soluciones, en principio no sabemos cuál es mejor, ni tampoco si existen otras soluciones al intentar con otros valores iniciales. Una estrategia sería comparar la SCErr para analizar cuál de ellas logra un menor valor de la función objetivo.

Concluimos que la solución de este tipo de modelos (no lineales) es generalmente muy sensible a los valores iniciales. También, que excepcionalmente es posible incluso que el algoritmo no encuentre una solución para determinados valores iniciales, esto es, no converja.

EJEMPLO: Curva de von Bertalanffy

El crecimiento en longitud de los abalones es generalmente representado a través de la conocida curva de von Bertalanffy:

$$L_t = L_\infty \cdot \left(1 - e^{-g \cdot t}\right)$$

donde el tiempo (t) está dado en días y la longitud (L y L_∞) en milímetros.

Varias son las fuentes disponibles para estimaciones empíricas de los parámetros de esta curva[9]. En Soria, K. y Zúñiga, S. (1998)[10] se obtiene que la longitud asintótica esperada (L_∞) es de 136.5 mm, y la tasa de crecimiento medio es de 22.5% anual (g = 0.225/360 = 0.0625% diario).

Ejemplo: Asuma las siguientes estimaciones de ostiones en un centro de cultivo:

T (edad en dias)	L_T (Longitud en mm)
1	5
30	10
60	40
70	45
90	48
100	49

Los resultados de las estimaciones con valores iniciales de 1,1 arrojan: L_∞=112,7289mm y g=0,006239, y la Suma Cuadrada de errores es de 164,2.

Ejemplo: Momento Optimo de cosecha. Asuma que el precio por mm es de P = $2,5, que la tasa de descuento diaria instantánea es de i=1,5%, y que no existen costos. Determine en el ejemplo anterior el momento óptimo de cosecha, es decir el que maximiza el VAN.

En este caso VAN = $L_{t\ ajustado}$ *P* Exp(-i*t)

Realizando los cálculos se verifica que el máximo VAN se obtiene al cosechar a los 56 días.

[9] A nivel internacional Shepherd y otros (1992, pp. 141-168), comparan diferentes mediciones de crecimiento del abalón usando este modelo. A nivel local, los informes de Illanes (1988) y de Trucco (1989) proporcionan las curvas de crecimiento para el abalón (H. Discus) en el norte de Chile.

[10] Soria, K. y Zúñiga, S. (1998) "Análisis de Rentabilidad Operacional en el Cultivo de Abalón, Haliotis Discus Hannai". Ciencia y Tecnología del Mar, 21:97-108.

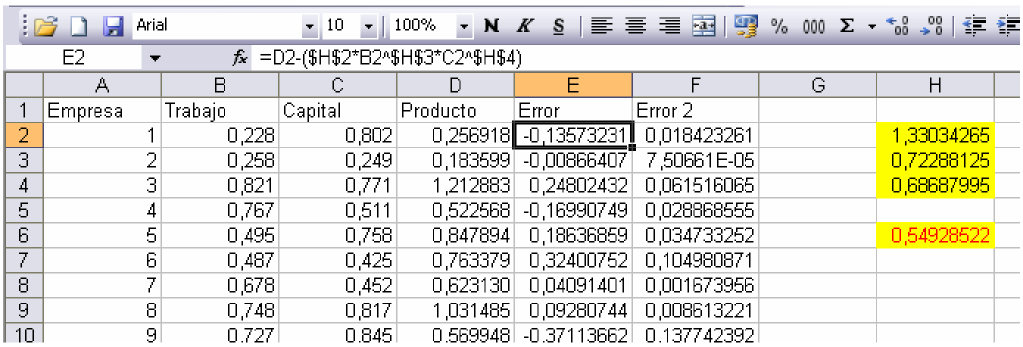
EJEMPLO: Función de Producción Cobb-Douglas Simple

Suponga una función de producción COBB-DOUGLAS (Judge, Pág. 512), en que deben estimarse ahora 3 coeficientes. Se tiene información de 30 empresas respecto a los insumos trabajo (L) y capital (K) requeridos para obtener una determinada producción (Q), de acuerdo a la siguiente relación:

$$Q = \beta_0 \cdot L^{\beta_1} \cdot K^{\beta_2} + \varepsilon$$

Empresa	Trabajo	Capital	Producto	Empresa	Trabajo	Capital	Producto
1	0,228	0,802	0,256918	16	0,664	0,129	0,186747
2	0,258	0,249	0,183599	17	0,631	0,017	0,020671
3	0,821	0,771	1,212883	18	0,059	0,906	0,100159
4	0,767	0,511	0,522568	19	0,811	0,223	0,252334
5	0,495	0,758	0,847894	20	0,758	0,145	0,103312
6	0,487	0,425	0,763379	21	0,050	0,161	0,078945
7	0,678	0,452	0,623130	22	0,823	0,006	0,005799
8	0,748	0,817	1,031485	23	0,483	0,836	0,723250
9	0,727	0,845	0,569948	24	0,682	0,521	0,776468
10	0,695	0,958	0,882497	25	0,116	0,930	0,216536
11	0,458	0,084	0,108827	26	0,440	0,495	0,541182
12	0,981	0,021	0,026437	27	0,456	0,185	0,316320
13	0,002	0,295	0,003750	28	0,342	0,092	0,123811
14	0,429	0,277	0,461626	29	0,358	0,485	0,386354
15	0,231	0,546	0,268474	30	0,162	0,934	0,279431

Una vez implementado, Solver llega rápidamente a una solución óptima, partiendo con valores iniciales de búsqueda 0,0,0:



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Empresa	Trabajo	Capital	Producto	Error	Error 2		
2	1	0,228	0,802	0,256918	-0,13573231	0,018423261		1,33034265
3	2	0,258	0,249	0,183599	-0,00866407	7,50661E-05		0,72288125
4	3	0,821	0,771	1,212883	0,24802432	0,061516065		0,68687995
5	4	0,767	0,511	0,522568	-0,16990749	0,028868555		
6	5	0,495	0,758	0,847894	0,18636859	0,034733252		0,54928522
7	6	0,487	0,425	0,763379	0,32400752	0,104980871		
8	7	0,678	0,452	0,623130	0,04091401	0,001673956		
9	8	0,748	0,817	1,031485	0,09280744	0,008613221		
10	9	0,727	0,845	0,569948	-0,37113662	0,137742392		

BETA1 = 1.33034, BETA2 = 0.72288, BETA3 = 0.6868. La Suma Cuadrada de Errores es: 0.5492

Como se sabe, los coeficientes Beta2 y Beta 3 corresponden respectivamente a elasticidades que mide la reacción % del producto ante una variación % del trabajo y del capital. Beta1 es la producción autónoma.

3.3. EL ALGORITMO ITERATIVO DE GAUSS-NEWTON

Al igual que para el caso de un modelo lineal, para el ajuste de un modelo de regresión no lineal la función objetivo es la suma cuadrada de errores (SCErrores), y se debe encontrar el valor de los parámetros β que minimizan esta suma, es decir:

$$\min_{\beta} \sum_{t=1}^{T} e_t^2 \qquad \text{donde } e_t = f(y_t, X_t, \beta)$$

Sabemos que el procedimiento de optimización clásico consiste en igualar las derivadas a cero y despejar el valor de los coeficientes que cumplen esta igualdad, lo que es complejo y muchas veces imposible, por lo cual resulta conveniente implementar un procedimiento iterativo. En econometría es común utilizar el algoritmo iterativo de Gauss-Newton[11] consistente en linealizar e_t alrededor de β* (una estimación inicial de β):

La expansión de Taylor de f(X,β) alrededor de β* es:

$$f(X,\beta) \approx f(X,\beta^*) + \left[\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^*}\right](\beta - \beta^*)$$

sustituyendo en $y = f(X,\beta) + e$ se tiene:

$$y \approx f(X,\beta^*) + \left[\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^*}\right](\beta - \beta^*) + e$$

reordenando:

$$\left\{ y - f(X,\beta^*) + \left[\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^*}\right]\beta^* \right\} = \left[\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^*}\right]\beta + e$$

es decir, dado un valor inicial para β*, para obtener una segunda estimación, dada por β, se requiere correr una regresión lineal sin intercepto en que la variable dependiente es la serie Y menos una serie que contiene el valor de la función evaluada en β*, más la derivada de la función evaluada en β* y multiplicada por β*. La variable independiente de esta regresión es la derivada de la función evaluada en β*.

[11] Entre muchas otras posibilidades existe también el método de Newton-Raphson.

La regresión anterior entrega una segunda estimación para β, en un proceso que continúa iterativamente hasta llegar a que la diferencia entre el último β y el anterior sea menor que un número pequeño.

Ejemplo: Si tratamos de ajustar el modelo: y = b*x1 + b**2*x2. La derivada es: x1 + 2*b*x2 (ver datos del ejemplo anterior: INFORMACIÓN SIMULADA DE Y(X1,X2))

Supongamos que el valor de búsqueda inicial es b=4.0.

a) La primera iteración será sobre las siguientes variables del modelo:
yy = y - (4*x1+4**2*x2) + (x1+2*4*x2)*4
xx = x1 + 2*4*x2
Corriendo la regresión sin intercepto se tiene que: b=2.0322393822

b) La segunda iteración, usando la estimación anterior (en lugar de b=4.0) será:
yy = y - (2.0322*x1+2.0322**2*x2) + (x1+2*2.0322*x2)* 2.0322
xx = x1 + 2*2.0322*x2
Corriendo la regresión sin intercepto se tiene que: b= 1.3085620020

c) La tercera iteración:
yy = y - (1.30856*x1+1.30856**2*x2) + (x1+2*1.30856*x2)* 1.30856
xx = x1 + 2*1.30856*x2
Corriendo la regresión sin intercepto se tiene que: b= 1.1696989113

d) La cuarta iteración:
yy = y - (1.1696989*x1+1.1696989**2*x2) + (x1+2*1.1696989*x2)* 1.1696989
xx = x1 + 2*1.1696989*x2
Corriendo la regresión sin intercepto se tiene que: b= 1.1614449723

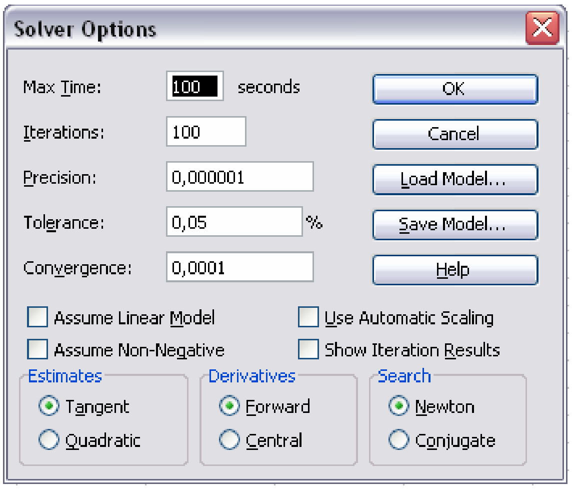
e) La quinta iteración:
yy = y - (1.1614*x1+1.1614**2*x2) + (x1+2*1.1614*x2)* 1.1614
xx = x1 + 2*1.1614*x2
Corriendo la regresión sin intercepto se tiene que: b= 1.1612128729

y así sucesivamente, en un proceso iterativo que tiende a converger a un valor cercano a B=1.16

3.4. SOLVER NO LINEAL: OPCIONES

Las siguientes son las principales opciones de Solver (clásico):

a) Max time: Cuánto tiempo Solver debe trabajar en el problema. Default 100 segundos, Máximo 32.767 segundos (más de nueve horas) b) Iterations: Cuantas iteraciones Solver debe hacer. Default = 100, Max = 32,767 c) Precision: Cuan exacto Solver debe trabajar en una solución, es decir el tamaño mínimo de la variación entre cada iteración. Default = 0.000001, Variable = 0.0000 – 1.0000 d) Tolerance: Cuan preciso debe ser cumpliendo restricciones enteras. Cuan cercano al objetivo se desea. e) Convergence: Indica cuando debe terminar la búsqueda de una mejor solución. Variable = 0 to 1.	a) Assume Linear Model: Si el modelo es lineal, se obtendrá con esto una solución más rápida. b) Assume Non-negative: Si las variables son >= 0 (esto agrega restricciones al problema). c) Use Automatic Scaling: Cuando los inputs y outputs tienen grandes diferencias en magnitud. d) Show Iteration Results: Hace una pausa entre cada iteración y muestra los resultados hasta ese momento.



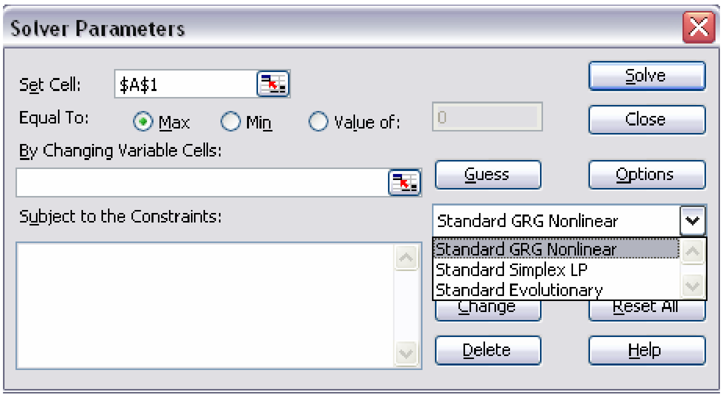
Existen tres opciones adicionales:

e) Estimates: Use Quadratic para optimización no lineal. Quadratic es más lento en problemas simples, pero más rápido en problemas complejos. Tangent =Usa extrapolación lineal a partir de un vector tangente. Quadratic = Usa extrapolación cuadrática, que puede mejorar los resultados en problemas altamente no lineales.

f) Derivatives: Indica la diferenciación usada para estimar las derivadas parciales de la FO y las restricciones. Use Central para problemas con muchas restricciones. Forward = Para la mayoría de los problemas, en que los valores restringidos cambian relativamente lento. Central = Para problemas donde las restricciones cambian rápidamente, especialmente cerca de los límites. Si bien requiere más cálculos, puede ayudar cuando Solver arroja un mensaje que no puede mejorar la solución.

g) Search: Permite elegir el algoritmo de cada iteración para encontrar la dirección a seguir en la búsqueda de la solución óptima. Newton, que es usualmente el mejor, usa un método quasi-Newton (método **BFGS**) que generalmente requiere más memoria (para almacenar la matriz Hessiana) pero menos iteraciones para un nivel dado de precisión. Conjugate gradient method = No requiere almacenar la matriz Hessiana pero necesita más iteraciones.

Existen otros tipos de Solvers más especializados, como se muestra en la siguiente Figura, que incluyen algoritmos Nolineales, Simples y Evolucionarios.



4. MAXIMA VEROSIMILITUD

4.1. INTRODUCCION

Si el error de un modelo econométrico (ε) es una variable aleatoria que es asumido normalmente distribuido, la siguiente es la función de densidad normal de ésta variable aleatoria:

$$f(\varepsilon / \beta, \sigma^2(\beta)) = \frac{1}{\sigma(\beta)\sqrt{2\pi}} EXP\left\{-\frac{1}{2}\frac{SCErr(\beta)_t}{\sigma^2(\beta)}\right\}$$

donde la suma cuadrada de errores (SCErr) dependerá del modelo que se esté trabajando, sea este lineal o no lineal. El objetivo del procedimiento es maximizar la función de densidad de probabilidad conjunta de la variable aleatoria, que es llamada función de verosimilitud, l(θ), es decir:

$$l(\beta) = \prod_{1}^{T}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} EXP\left\{-\frac{1}{2}\frac{SCErr_t}{\sigma^2}\right\}\right\} = \left(2\pi\sigma^2\right)^{(-T/2)} EXP\left\{-\frac{1}{2}\frac{SCErr_t}{\sigma^2}\right\}$$

aplicando logaritmos naturales:

$$L = \log(l(\beta)) = \sum_{1}^{T}\left[\log\left[\left(2\pi\sigma^2\right)^{(-1/2)}\right] - \frac{1}{2\sigma^2}SCErr_t\right]$$

Luego, para maximizar la probabilidad de ocurrencia del valor de un parámetro, se debe maximizar esta última expresión, es decir encontrar los parámetros que maximizan la suma anterior. Nótese que ésta suma puede simplificarse a:

$$L = \sum_{1}^{T}\left[-\frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}SCErr_t\right]$$

Puesto que el primer término de la sumatoria es una constante, es irrelevante en el proceso de maximización, de modo que puede ser eliminado, y la función objetivo es simplemente:

$$L = \sum_{1}^{T}\left[-\frac{1}{2}\left(\log\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}SCErr_t\right)\right]$$

4.2. MAXIMA VEROSIMILITUD EN EXCEL

Pueden usarse varias fórmulas simultáneamente, sin embargo cuando se trate de máxima verosimilitud se usará a lo menos una instrucción como la siguiente:

FRML L = -0.5*(log(var) + E**2/var)

donde VAR es el parámetro usado para la varianza de los errores y E es usado para definir el error.

4.2.1. Ejemplo: Estimación de Función de Producción COBB-DOUGLAS

Estimamos a continuación la función de producción COBB-DOUGLAS, anteriormente estimada por mínimos cuadrados no lineales, ahora por máxima verosimilitud. Recordemos que se tiene información de 30 empresas respecto a los insumos trabajo (L) y capital (K) requeridos para obtener una determinada producción (Q), de acuerdo a la relación:

$$Q = \beta_0 \cdot L^{\beta_1} \cdot K^{\beta_2} + \varepsilon$$

Para esto seguimos los siguientes pasos:

a) Implementar en la columna J el valor de la función de verosimilitud para cada observación

b) Definir la función objetivo, que es la suma de la columna J, es decir la celda J32

c) Las celdas cambiantes son H2:H5. Esta última celda (H5) corresponde a la varianza. Los valores iniciales de búsqueda en este caso son: B0=1.0, B1=0.4, B2=0.6, VAR=0.01

d) Esta es una estimación difícil. Probablemente debe ir a opciones y cambiar a 'Conjugate' en lugar de 'Newton'.

J2 =-1/2*(LN($H$5)+F2/$H$5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Empresa	Trabajo	Capital	Producto	Error	Error 2				LOK
2	1	0,228	0,802	0,256918	-0,13564619	0,018399888		1,3300378		1,497698562
3	2	0,258	0,249	0,183599	-0,00871395	7,59329E-05		0,7229349		1,998234675
4	3	0,821	0,771	1,212883	0,248154349	0,061580581		0,6864763		0,318177211
5	4	0,767	0,511	0,522568	-0,16992662	0,028875055		0,0183043		1,211559491
6	5	0,495	0,758	0,847894	0,186471142	0,034771487				1,0504929
7	6	0,487	0,425	0,763379	0,323973395	0,104958761				-0,866738681
8	7	0,678	0,452	0,623130	0,04087294	0,001670597				1,954674915
9	8	0,748	0,817	1,031485	0,092960579	0,008641669				1,764253509
10	9	0,727	0,845	0,569948	-0,37096886	0,137617892				-1,758853658
11	10	0,695	0,958	0,882497	-0,11024673	0,012154343				1,668301525
12	11	0,458	0,084	0,108827	-0,02928616	0,000857679				1,976880539
13	12	0,981	0,021	0,026437	-0,06605083	0,004362711				1,881137276
14	13	0,002	0,295	0,003750	-0,00268769	7,22366E-06				2,000111534
15	14	0,429	0,277	0,461626	0,162791913	0,026501207				1,27640339
16	15	0,231	0,546	0,268474	-0,03588481	0,00128772				1,965133575
17	16	0,664	0,129	0,186747	-0,05577103	0,003110407				1,915345145
18	17	0,631	0,017	0,020671	-0,03747815	0,001404612				1,961940553
19	18	0,059	0,906	0,100159	-0,06047578	0,00365732				1,900405722
20	19	0,811	0,223	0,252334	-0,15572103	0,024249039				1,337923471
21	20	0,758	0,145	0,103312	-0,18587029	0,034547763				1,056604122
22	21	0,050	0,161	0,078945	0,03541298	0,001254079				1,9660525
23	22	0,823	0,006	0,005799	-0,02867226	0,000822098				1,977852464
24	23	0,483	0,836	0,723250	0,028266008	0,000798967				1,978484312
25	24	0,682	0,521	0,776468	0,131828774	0,017378826				1,525589841
26	25	0,116	0,930	0,216536	-0,05008376	0,002508383				1,931789998
27	26	0,440	0,495	0,541182	0,087807377	0,007710136				1,789699232
28	27	0,456	0,185	0,316320	0,079592585	0,00633498				1,827262911
29	28	0,342	0,092	0,123811	0,004779985	2,28483E-05				1,999684733
30	29	0,358	0,485	0,386354	0,00121311	1,47164E-06				2,000268655
31	30	0,162	0,934	0,279431	-0,06100749	0,003721914				1,898641252
32						0,549285591				45,00501167
33										Funcion de verosimilitud

Note que el valor final de la unción objetivo es 45.005, y que la Suma Cuadrada de Errores es nuevamente 0.5492. También, que B0 = 1,330, B1 = 0,7229, B2 = 0,6865, y B2 = 0,0183.

4.2.1. EJEMPLO: MODELOS GARCH

Los modelos de volatilidad condicional (en inglés GARCH, Modelo Generalizado Autorregresivo de Heterocedasticidad Condicional) son ideales para el estudio de fenómenos donde la varianza condicional no es constante a través del tiempo. Por ejemplo, los rendimientos de las bolsas de valores accionarios presentan periodo de baja volatilidad y periodos de alta volatilidad, de modo que el supuesto de varianzas constantes (homocedasticidad como en el ejemplo anterior) puede no ser apropiado.

La necesidad de estimar la volatilidad condicional en lugar de la no condicional, se fundamenta en que esta última no logra capturar el comportamiento a través de los cambios respecto a la media. A modo de ilustración, considérese dos series temporales de observaciones tal que ambas tengan la misma media, valores máximos y mínimos. Si la autocorrelación de la primera serie es cercano a +1.0, existirá un comportamiento relativamente suave de una observación a otra, y si la autocorrelación de la segunda serie es cercana a 0.0 existirá un comportamiento más "ruidoso". Pues bien, ambas series pueden reportar en efecto la misma volatilidad no condicional, aunque claramente la segunda serie es más volátil, y una estimación de volatilidad condicional reportará este hecho. Note que una alternativa para que la volatilidad no condicional refleje esta diferencia es que sea calculada en base a las primeras diferencias de la serie original, pues de esta forma se considera el patrón temporal de las series.

a) Modelos ARCH: Engle (1982) desarrolló un modelo que admite que tales varianzas sean no constantes, cual es llamado Modelo de Heterocedasticidad Condicional (ARCH), en donde la varianza de u en el tiempo t depende del tamaño del término de error al cuadrado en el tiempo (t-1). Por ejemplo, si el modelo base a estimar es del tipo autorregresivo de 1º orden, AR(1), entonces:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \mu_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \varepsilon_t$$

pero el termino μ_t es definido como un proceso $N(0\ ,\ \alpha_0 + \alpha_1\mu^2_{t-1})$, es decir la varianza de μt depende del termino de perturbación en el período de tiempo anterior al cuadrado, lo que corresponde a un proceso conocido como ARCH (1). Note que si bien μ es heterocedástico, ε es bien comportado.

b) Modelos GARCH: La generalización del modelo ARCH es el modelo GARCH desarrollado por Bollerslev (1986). Una especificación Garch (1,1) está definido, por ejemplo, como:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \mu_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \mu_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_3 Y_{t-1} + e_t$$

es decir, la varianza del error depende del error anterior al cuadrado (componente AR), de la varianza anterior (componente MA), y eventualmente de otra información, como por ejemplo el valor de la serie Y rezagado.

En estos casos la función de verosimilitud tiene la siguiente forma:

$$\underset{\{\alpha,\beta\}}{MAX} \quad L = \sum_{1}^{T}\left[-\frac{1}{2}\left(\log\sigma^2(\alpha) - \frac{1}{\sigma^2(\alpha)}SCErr_t(\beta)\right)\right]$$

Ejemplo: En un estudio[12] se estimó la volatilidad para la tasa nominal de los PDBC-30 para 156 observaciones comenzando 1983 1 12:

$$\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \mu_t$$
$$\sigma_t^2 = \chi \cdot Y_{t-1}^{2\cdot\gamma} + \varepsilon_t$$

No se preocupe por los mensajes de error que saldrán en las fórmulas debido a la inexistencia de algunas observaciones. Sin embargo en la columna de la función de verosimilitud (L), elimine todas las celdas con error.

Los valores iniciales de búsqueda sugeridos son: B0=0.008, B1=-0.5, G=1.0, chi=0.8

F3 fx =$G$5*B2^(2*$G$6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	MES	R	DR	E	E2	VAR			L
2	83-01	0,0321							
3	83-02	0,026	-0,0061	-0,000762313	5,81121E-07	6,3059E-05	**0,00609224**		4,831112238
4	83-03	0,0223	-0,0037	-0,000534355	2,85535E-07	4,89274E-05	-0,356072505		4,959669045
5	83-04	0,0234	0,0011	0,002948177	8,69175E-06	4,06714E-05	0,003960684		4,94813926
6	83-05	0,023	-0,0004	0,001839856	3,38507E-06	4,30987E-05	0,601951549		4,986737766
7	83-06	0,0211	-0,0019	0,000197427	3,89775E-08	4,22133E-05			5,035925982
8	83-07	0,019	-0,0021	-0,00067911	4,61191E-07	3,80512E-05			5,082228493
9	83-08	0,018	-0,001	-0,000326863	1,06839E-07	3,35395E-05			5,149800913
10	83-09	0,019	0,001	0,001317065	1,73466E-06	3,14259E-05			5,156340271
11	83-10	0,019	0	0,000673137	4,53114E-07	3,35395E-05			5,144638719
12	83-11	0,019	0	0,000673137	4,53114E-07	3,35395E-05			5,144638719
13	83-12	0,0178	-0,0012	-0,000526863	2,77584E-07	3,35395E-05			5,147255479
14	84-01	0,016	-0,0018	-0,00155415	2,41538E-06	3,1006E-05			5,151715032
15	84-02	0,0123	-0,0037	-0,00409508	1,67697E-05	2,72712E-05			4,9473781
16	84-03	0,0091	-0,0032	-0,004912548	2,41331E-05	1,98701E-05			4,805874931
17	84-04	0,014	0,0049	0,00204802	4,19438E-06	1,38246E-05			5,442829473
18	84-05	0,014	0	-0,001107225	1,22595E-06	2,32214E-05			5,308821647

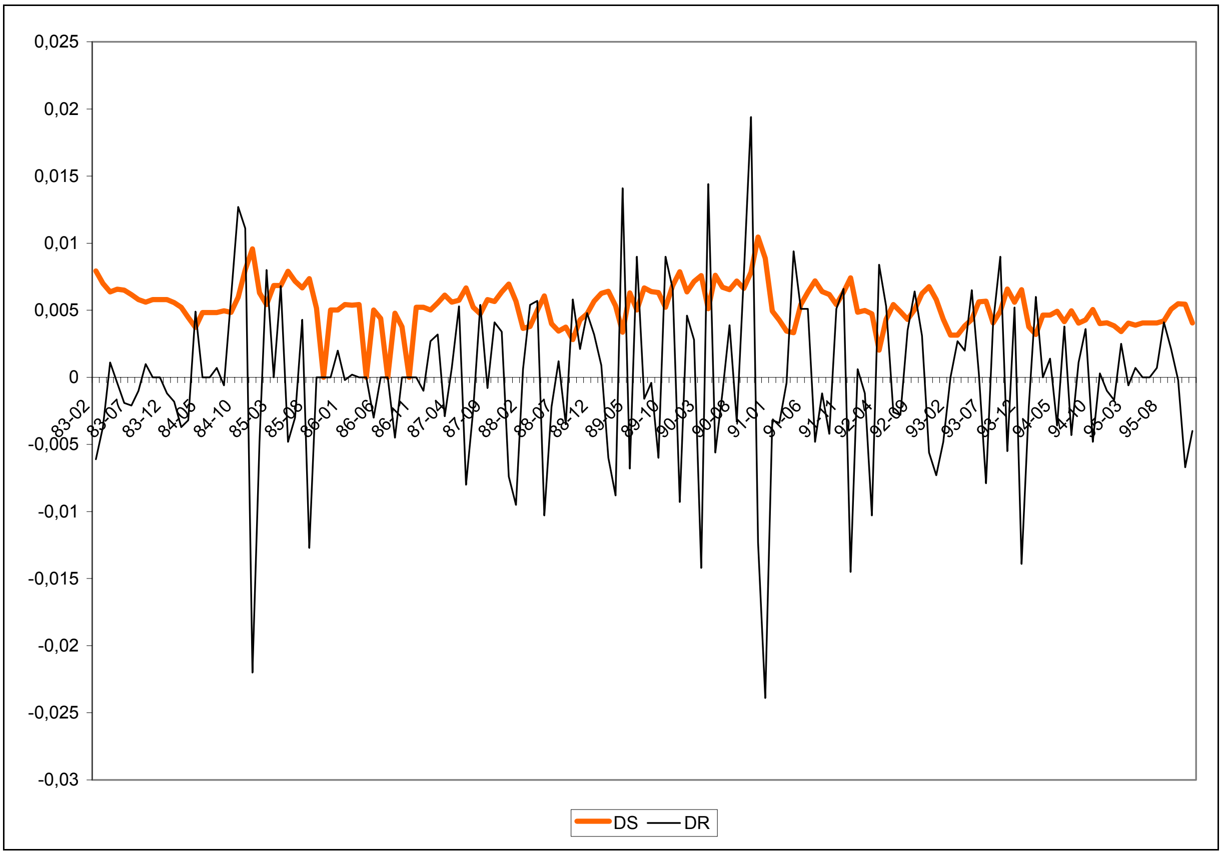
12 Zúñiga, Sergio "Modelos de Tasas de Interés en Chile: Una Revisión". (1999). CUADERNOS DE ECONOMÍA (Latin American Journal of Economics): Revista del Instituto de Economía de la Pontificia Universidad Católica de Chile, Año 36, Nº108: 875-893.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
145	94-12	0,0096	-0,001	-0,003317872	1,10083E-05	1,66123E-05			5,171354588
146	95-01	0,0079	-0,0017	-0,004373944	1,91314E-05	1,47442E-05			4,913553323
147	95-02	0,0104	0,0025	-0,000779267	6,07258E-07	1,16605E-05			5,653612903
148	95-03	0,0098	-0,0006	-0,002989086	8,93464E-06	1,62357E-05			5,238995262
149	95-04	0,0105	0,0007	-0,00190273	3,62038E-06	1,51148E-05			5,430156505
150	95-05	0,0105	0	-0,002353479	5,53886E-06	1,64238E-05			5,339766287
151	95-06	0,0105	0	-0,002353479	5,53886E-06	1,64238E-05			5,339766287
152	95-07	0,0112	0,0007	-0,001653479	2,73399E-06	1,64238E-05			5,425156671
153	95-08	0,0153	0,0041	0,001995772	3,9831E-06	1,77508E-05			5,357345081
154	95-09	0,0174	0,0021	0,001455669	2,11897E-06	2,58413E-05			5,240768318
155	95-10	0,0172	-0,0002	-9,65787E-05	9,32745E-09	3,01691E-05			5,204192004
156	95-11	0,0105	-0,0067	-0,006667793	4,44595E-05	2,97521E-05			4,464140131
157	95-12	0,0065	-0,004	-0,006353479	4,03667E-05	1,64238E-05			4,279481382
158									697,3232622

Nota: En RATS, con los parámetros anteriores su obtuvo que Function Value = 697.39073890

```
   Variable                        Coeff         Std Error       T-Stat      Signif
*************************************************************************
1.   ALFA                       0.006008122   0.000868222      6.92003   0.00000000
2.   BETA                      -0.350645564   0.056524519     -6.20342   0.00000000
3.   GAMA                       0.559280906   0.113800412      4.91458   0.00000089
4.   CHI2                       0.002786748   0.002648667      1.05213   0.29273900
```

Para Graficar, ponga en una columna el tiempo, al lado en otra dR y en otra (var)**0.5



Se aprecia aquí la forma en la volatilidad (DR) es ajustada a través de una función continua (DS).

5. MODELOS BINARIOS

5.1. INTRODUCCIÓN: VARIABLES DUMMIES

Las variables Dummies son variables que sólo pueden tomar dos valores, en particular los valores 0 y 1. Son usadas principalmente para indicar ausencia o presencia de un atributo o evento.

Ejemplos típicos son del uso de estas variables son:

- Identificar variables cualitativas: hombres versus mujeres, personas sanas versus enfermas, si se habita una casa de más de 100 metros 2 o menos, etcétera.
- Identificar distintos periodos: periodos de auge versus periodos de recesión, periodos de control del tipo de cambio o no, etcétera.

Cuando existan 3 grupos, puede usarse 2 variables dummies para identificarlos. En efecto, si las familias son clasificados en ingresos bajos, medios y altos, D1 = 1 puede identificar el primer grupo y D2 = 1 el segundo grupo, mientras que el tercer grupo será identificado cuando D1 y D2 sean cero. Es decir, se requieren i-1 variables dummies para identificar i grupos.

5.2. APLICACIONES DE LAS VARIABLES DUMMIES

Entre los principales usos prácticos de las variables dummies en econometría se encuentran los siguientes:

a) Comparar Regresiones: Determinar diferencias de interceptos y pendientes entre represiones, lo que puede hacerse por separado o simultáneamente. En este último caso se trata de una prueba de cambio estructural.
b) Cálculo de medias, lo que permite estimar, por ejemplo, la existencia de efectos estacionales.

Analicemos a continuación cada uno de éstos usos.

5.2.1. PRUEBAS DE DIFERENCIAS ENTRE INTERCEPTOS Y PENDIENTES

En la siguiente regresión D es la variable dummy, la que tiene un valor 1.0 para el primer grupo y un valor 0.0 para el segundo grupo.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 D + e_t$$

El coeficiente β2 captura la diferencia entre dos interceptos en el caso que se hubiese corrido por separado el modelo $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + e_t$ para ambos grupos. El error estándar de estimación del coeficiente β2 nos permitirá determinar si la diferencia entre interceptos es significativa o no. Note que implícitamente se está asumiendo que ambas regresiones tienen los mismos coeficientes de pendientes.

Cuando existan 3 características puede usarse el siguiente modelo con dos variables dummies:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 D_1 + \beta_2 D_2 + e_t$$

Para verificar la existencia de diferencias en las pendientes de dos regresiones, el modelo es el siguiente:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1 D + e_t$$

Finalmente, para verificar simultáneamente la existencia de diferencias entre interceptos y pendientes el modelo es el siguiente:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 D + \beta_3 X_1 D + e_t$$

donde β2 mide la diferencia entre interceptos y β3 mide la diferencia entre pendientes.

Ejemplo: Se tiene información de consumo (C) y de ingreso (Y), y de las siguientes variables relacionadas con el jefe de familia:

1.- Sexo	D1 = 1 si masculino = 0 otro
2.- Edad: <=25 años; entre 25 y 50; y >=50 años	D2 = 1 si <=25 = 0 otro D3 = 1 si entre 25 y 50 = 0 otro
3.- Educación: <=Básica; entre básica y superior; y >=superior	D4 = 1 si <= básica = 0 otro D5 = 1 si entre básica y media = 0 otro

Y el modelo que permite analizar el efecto de cada variable sobre el consumo es:

$$C = \beta_0 + \beta_1 \cdot Y + \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3 + \lambda_4 D_4 + \lambda_5 D_5 + \varepsilon$$

<u>Ejemplo (Tabla 03.xls)</u>: Se tiene la siguiente información sobre ahorro e ingreso del Reino Unido 1946-1963 (millones de libras), Ahorro = f(Ingreso), y se desea determinar si existe un cambio estructural del periodo 1946-1954 versus 1955-1963.

Año	Ahorro	Ingreso	D	D*Ingreso
1946	0,36	8,8	1	8,8
1947	0,21	9,4	1	9,4
1948	0,08	10,0	1	10
1949	0,20	10,6	1	10,6
1950	0,10	11,0	1	11
1951	0,12	11,9	1	11,9
1952	0,41	12,7	1	12,7
1953	0,50	13,5	1	13,5
1954	0,43	14,3	1	14,3
1955	0,59	15,5	0	0
1956	0,90	16,7	0	0
1957	0,95	17,7	0	0
1958	0,82	18,6	0	0
1959	1,04	19,7	0	0
1960	1,53	21,1	0	0
1961	1,94	22,8	0	0
1962	1,75	23,9	0	0
1963	1,99	25,2	0	0

a) Con el Test de Chow:

$$F = \frac{[0{,}5722 - (0{,}1396 + 0{,}1931)]/2}{(0{,}1396 + 0{,}1931)/(18-4)} = 5{,}03707 \quad vs \quad F(2{,}14) = 3{,}73$$

y rechazamos la hipótesis nula, implicando la existencia de cambio estructural.

b) Con variables dummies.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 D + \beta_3 X_1 D + e_t$$

```
Variable                     Coeff       Std Error      T-Stat     Signif
*******************************************************************************
1.  Constant              -1.750172085  0.331888275     -5.27338  0.00011773
2.  D                      1.483922674  0.470362072      3.15485  0.00702357
3.  INGRESO                0.150450048  0.016285695      9.23817  0.00000025
4.  DX                    -0.103422214  0.033260387     -3.10947  0.00768641
```

puesto que todos los coeficientes son significativamente diferentes de cero, entonces, al igual que en el test de Chow, encontramos evidencia de cambio estructural.

5.2.2. VARIABLES DUMMIES EN EL CÁLCULO DE MEDIAS

Si en un modelo de regresión debe clasificarse una serie de observaciones de acuerdo a cierto número de características, y se define una variable para cada una de estas características, entonces el modelo de regresión sin intercepto dado por:

$$Y_t = \beta_1 D_1 + \beta_2 D_2 + \beta_3 D_3 + \ldots + \beta_k D_k + e_t$$

tiene la propiedad que cada coeficiente de pendientes es la media de la serie respecto solamente a las observaciones que contienen el atributo capturado cada variable dummy D. En particular, $\beta 1$ es la media de la serie en las observaciones en que D1=1, y así respectivamente para cada coeficiente.

Ejemplo: Trabajando con los datos del ejemplo anterior (Tabla 03.xls), supongamos que se tiene información que hubo sequía, clima normal y hubo inundaciones, los que son identificados en la siguiente tabla con una variable Dummy (D1 si hubo sequía, D2 si hubo clima normal, y D3 si hubo inundaciones).

Año	Ahorro	D1	D2	D3
1946	0,36	0	1	0
1947	0,21	0	1	0
1948	0,08	1	0	0
1949	0,20	1	0	0
1950	0,10	1	0	0
1951	0,12	0	0	1
1952	0,41	0	0	1
1953	0,50	0	0	1
1954	0,43	0	0	1
1955	0,59	0	1	0
1956	0,90	0	0	1
1957	0,95	0	0	1
1958	0,82	1	0	0
1959	1,04	1	0	0
1960	1,53	1	0	0
1961	1,94	0	1	0
1962	1,75	0	0	1
1963	1,99	0	0	1

El resultado de la estimación sin intercepto es:

	Coeficientes	*Error típico*	*Estadístico t*
Variable X 1	0,62833333	0,27497618	2,28504643
Variable X 2	0,775	0,33677566	2,30123517
Variable X 3	0,88125	0,23813636	3,70061094

Es decir el ahorro promedio anual del Reino Unido 1946-1963 (millones de libras) con clima de sequía fue de 0,628333, con clima normal 0,775, y 0,88125 para inundaciones. Los resultados son significativos estadísticamente.

Ejemplo: En un estudio[13] usamos el siguiente modelo para analizar los diferentes efectos estacionales:

$$R_{it} = \sum_{k} \beta_k \delta_{kt} + \varepsilon_{it}$$

donde:

Rit = retorno real anual del PRBCi (Pagaré Reajustable del Banco Central de Chile) en el día t. El rendimiento es asumido estacionario.

δkt = variable dummy que toma el valor δk = 1 si la observación t pertenece al evento k, y δk= 0 en cualquier otro caso. Por ejemplo δ1 =1 identifica un día lunes para el efecto día de la semana, y δ3 =1 identifica a marzo para el efecto mes del año, etcétera.

βk = es el coeficiente de la variable dummy, y corresponde al retorno medio de cada evento k

εit = son los errores, que se asumen independiente e idénticamente distribuidos.

El resultado es:

	Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif
1.	LUN	0.0473724622	0.0002052119	230.84655	0.00000000
2.	MAR	0.0549598342	0.0002346503	234.22013	0.00000000
3.	MIE	0.0567839668	0.0002498271	227.29308	0.00000000
4.	JUE	0.0503303643	0.0002144062	234.74302	0.00000000
5.	VIE	0.0389386377	0.0002242214	173.66157	0.00000000

;* los resultados son altamente significativos.

[13] Zúñiga, Sergio (2001) "Efectos Estacionales y Relación Volumen-Rendimiento en los Pagarés Reajustables del Banco Central de Chile". Revista Economía Chilena, del Banco Central de Chile. Volumen 4 Número 1. abril, 2001.

5.3. VARIABLES DUMMIES DEPENDIENTES: PROBIT Y LOGIT

5.3.1. Introducción

Un modelo de respuesta binaria es una regresión en la cual la variable dependiente Y es una variable aleatoria binaria que toma únicamente valores de cero y uno. En muchas aplicaciones económicas se produce la situación en la cual los agentes tienen sólo dos alternativas.

Así,en muchos casos la variable dependiente es una categoría, o define la pertenencia a cierto grupo[14], mientras que las variables independientes X pueden ser continuas. Por ejemplo:

- ¿Pertenece Ud. a la Asociación?
- ¿Qué tipo de transporte usa?
- ¿Terminó la enseñanza secundaria?
- ¿Sus conocimientos de Ingles son buenos, medios o pobres?

En un modelo de probabilidad lineal: $Y_i = B_0 + B_1X_{1i} + B_2X_{2i} + u_i$

donde

X_{ji} = es el valor del atributo j para el agente i

Y_i = 1 si el evento u opción A es verdadera

= 0 de otro modo

la probabilidad condicional de Yi dado X's, es la probabilidad que el evento A sea verdadero, o de otro modo, el valor predicho de Yi a partir de la regresión OLS.

En estos casos se presentan dos grandes problemas:

1) Cuando la variable dependiente (o de la mano izquierda) es binaria, la distribución del error es binomial, y no es aproximada bien por la normal o ninguna otra distribución continua de forma acampanada.

2) P_i (es decir Y estimado) debe estar en el rango (0,1), y nada asegura hasta ahora que esto ocurra con un modelo lineal[15]. En efecto, Zi = B0 + B1X1i + B2X2i toma valores cualesquiera positivos o negativos, pero una vez que corremos el índice a través de la función normal o logística acumulativa, se convierte en un área entre $-\infty$ y el valor de Zi, lo que restringe los resultados al rango deseado, pues ambas especificaciones tienen la restricción que la probabilidad es un número entre 0 y 1.

[14] Los datos en este tipo de modelos son típicamente cross sectional.

[15] Dada una variable dependiente binaria Y, el modelo de regresión lineal presenta serias inconsistencias. Para evitarlas, se han desarrollado modelos no lineales como los LOGIT y PROBIT.

Sea: $Z = \beta o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$

$$P[Y_i = 1 | X_i] = \begin{cases} F(z) \\ F[X_t, \beta] \\ F[X \cdot \beta] \\ F[\beta o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2] \\ P[\beta o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2] \end{cases} \qquad P[Y_i = 0 | X_i] = \begin{cases} 1 - F(z) \\ \\ 1 - P[\beta o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2] \end{cases}$$

<table>
<tr>
<td>En el caso de los modelos Logit, F es la función de probabilidad logística acumulativa.</td>
<td>En el caso de los modelos Probit, F es la función de probabilidad acumulada normal</td>
</tr>
<tr>
<td>

$Y = F[\beta o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2] + u$

donde

$$F(z) = \pi(x) = \frac{e^z}{1 + e^z} = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

por lo que

$$E(Y) = P(Y = 1) = \frac{e^{[\beta o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2]}}{1 + e^{[\beta o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2]}}$$

$$Sean\ Odds = \frac{P}{1 - P} = \frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)},\ entonces:$$

a) $g(x) = \ln\left(\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}\right) = \beta o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$

b) $\boxed{\frac{\exp(\mathbf{xb})}{1 + \exp(\mathbf{xb})} = \frac{\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}}{1 + \frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}} = \frac{\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}}{\frac{(1 - \pi(x)) + \pi(x)}{1 - \pi(x)}} = \frac{\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}}{\frac{1}{1 - \pi(x)}} = \pi(x)}$

</td>
<td>

$Y = F[\beta o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2] + u$

donde

$$F(z) = \phi(x) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-t^2/2\right)} dt$$

por lo que

$$E(Y) = P(Y = 1) = \int_{-\infty}^{\beta o + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-t^2/2\right)} dt$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

La función de verosimilitud es:

$$\log(L) = \sum_{Y_i = 1} \log F(Z_i) + \sum_{Y_i = 0} \log(1 - F(Z_i))$$

$$L(\beta) = \ln[l(\beta)] = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i \ln[\pi(x_i)] + (1 - y_i) \ln[1 - \pi(x_i)] \right\}$$

</td>
<td>

La función de verosimilitud es:

$$\log(L) = \sum_{Y_i = 1} \log F(Z_i) + \sum_{Y_i = 0} \log(1 - F(Z_i))$$

$$\ln L = \sum w_j \ln \Phi(x_j b) + \sum w_j \ln\left(1 - \Phi(x_j b)\right)$$

</td>
</tr>
</table>

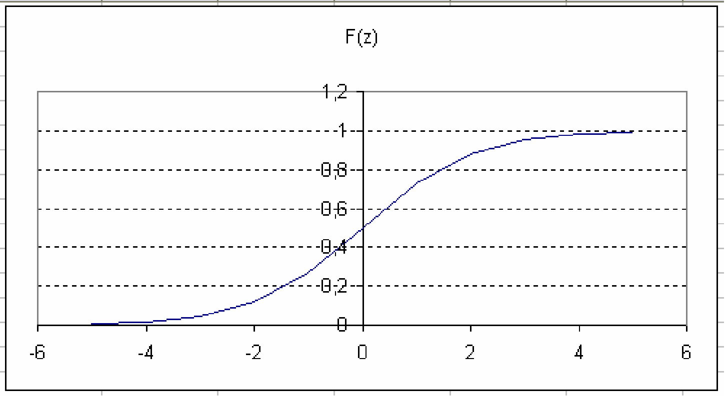
5.3.2. LOGIT vs PROBIT

Los siguientes gráficos ilustran las funciones LOGIT y PROBIT respectivamente para z entre -5 y 5, apreciándose que ambas son funciones similares, crecientes en z, aunque más probablemente alrededor de cero:

MODELO LOGIT

B9 =EXP(A9)/(1+EXP(A9))

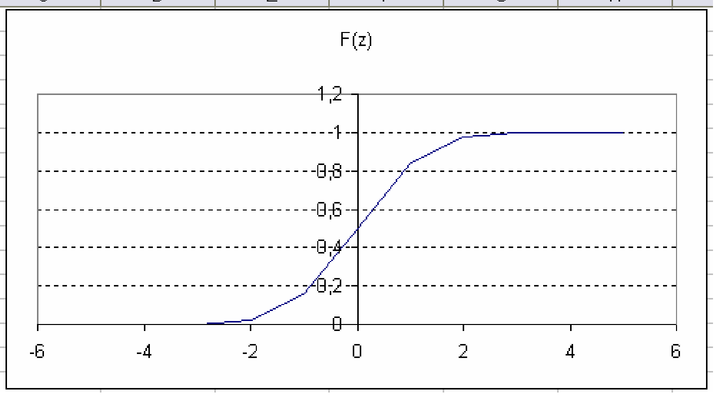
	A	B
1	z	F(z)
2	-5	0,006692851
3	-4	0,01798621
4	-3	0,047425873
5	-2	0,119202922
6	-1	0,268941421
7	0	0,5
8	1	0,731058579
9	2	0,880797078
10	3	0,952574127
11	4	0,98201379
12	5	0,993307149



MODELO PROBIT

B31 =DISTR.NORM.ESTAND(A31)

	A	B
23	z	F(z)
24	-5	2,86652E-07
25	-4	3,16712E-05
26	-3	0,001349898
27	-2	0,022750132
28	-1	0,158655254
29	0	0,5
30	1	0,841344746
31	2	0,977249868
32	3	0,998650102
33	4	0,999968329
34	5	0,999999713



A modo de comparación entre ambos modelos, LOGIT tiene colas más gruesas, de modo que es levemente menos probable predecir valores cercamos a 0 o 1.

La tarea es estimar los parámetros β en estos modelos. Pero puesto que son no lineales en β, OLS no es apropiado y debe usarse métodos no lineales (por ej. maximum likelihood).

En este tipo de modelos no resulta posible interpretar directamente las estimaciones de los parámetros β, ya que son modelos no lineales[16].

5.3.3. Modelos Logit

<u>Ejemplo LOGIT</u>: Se tiene la edad y la situación de enfermedad coronaria que es una variable dummy (0 para no enfermedad, y 1 para sí enfermedad), de 10 personas según grupo de edad. El objetivo es determinar la probabilidad de que una persona presente enfermedad coronaria según el grupo de edad al que pertenece. La estimación LOGIT es como sigue:

H2 fx =SI(D2;LN(G2);LN(1-G2))

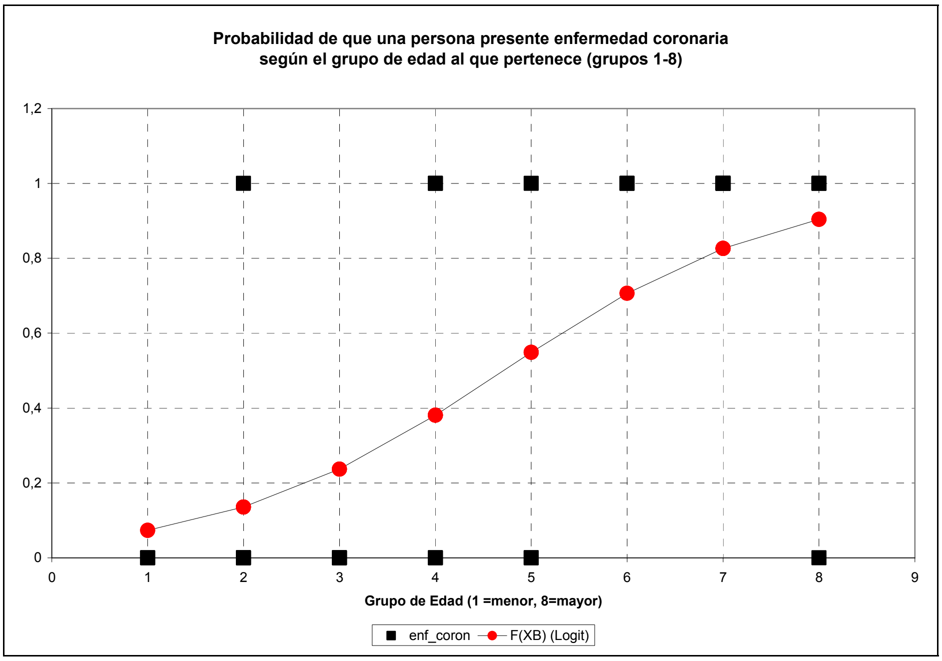
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	id	edad	grupo	enf_coron		XB	F(XB) (Logit)	Logit
2	1	24	1	0	-3,216575001	-2,53414325	0,07349901	-0,07634016
3	2	26	1	0	0,682431756	-2,53414325	0,07349901	-0,07634016
4	3	30	2	0		-1,85171149	0,13567207	-0,14580304
5	4	30	2	0		-1,85171149	0,13567207	-0,14580304
6	5	33	2	0		-1,85171149	0,13567207	-0,14580304
7	6	34	2	1		-1,85171149	0,13567207	-1,99751453
8	7	35	3	0		-1,16927973	0,2369852	-0,27047785
9	8	37	3	0		-1,16927973	0,2369852	-0,27047785
10	9	38	3	0		-1,16927973	0,2369852	-0,27047785
11	10	40	4	1		-0,48684798	0,38063638	-0,96591073
12	11	42	4	0		-0,48684798	0,38063638	-0,47906275
13	12	43	4	0		-0,48684798	0,38063638	-0,47906275
14	13	44	4	1		-0,48684798	0,38063638	-0,96591073
15	14	46	5	0		0,19558378	0,54874067	-0,79571309
16	15	47	5	1		0,19558378	0,54874067	-0,60012932
17	16	49	5	0		0,19558378	0,54874067	-0,79571309
18	17	50	6	1		0,87801553	0,70641082	-0,34755831
19	18	53	6	1		0,87801553	0,70641082	-0,34755831
20	19	55	7	1		1,56044729	0,82641753	-0,19065515
21	20	56	7	1		1,56044729	0,82641753	-0,19065515
22	21	57	7	1		1,56044729	0,82641753	-0,19065515
23	22	58	7	1		1,56044729	0,82641753	-0,19065515
24	23	60	8	0		2,24287905	0,90403452	-2,34376677
25	24	62	8	1		2,24287905	0,90403452	-0,10088773
26	25	65	8	1		2,24287905	0,90403452	-0,10088773
27								-12,4838195

<u>Nota</u>: Regla de la función =si(…) es que cuando no aparece ninguna operación lógica (ej: =, >, <, etc) en la pregunta lógica, entonces la pregunta implícita es ≠0.

De modo que el resultado de la maximización de la función de verosimilitud arroja los coeficientes B1=-3,216575001 y B2=0,682431756, con un máximo de la función en -12,4838.

Podemos visualizar los datos como sigue:

[16] Puesto que los coeficientes de la regresión probit o logit pueden ser usados para estimar las probabilidades, los coeficientes de la regresión implican cambios en probabilidades.



A modo de aplicación del ejemplo anterior, ¿Cuál es la probabilidad de una persona de 35 años, de tener una enfermedad cardiaca?. Puesto que 35 años pertenece al grupo 3, la probabilidad es 23,69%.

5.3.4. Modelos Probit

Ejemplo PROBIT: Véase el trabajo: 'Estimando la probabilidad de una Recesión en Chile'[17]. El crecimiento del producto chileno tradicionalmente es medido por la variación del Indice Mensual de Actividad Económica (IMACEC) respecto al mismo mes anterior del año anterior (VAR12M). Como variables explicativas, se tiene:

- Tasa de interés de plazo medio: la tasa de interés efectiva pagada en operaciones de1 a 3 años publicadas por el Banco Central (T1_3).
- Indicadora del mercado accionario: el rendimiento real del Índice General de Precios de las Acciones de la Bolsa de Comercio de Santiago (IGPA) calculado sobre una base de 18 meses (GRIGPA_18M).

Los datos se entregan en “Probit Recesion en Chile.xls”.

El modelo toma la siguiente forma:

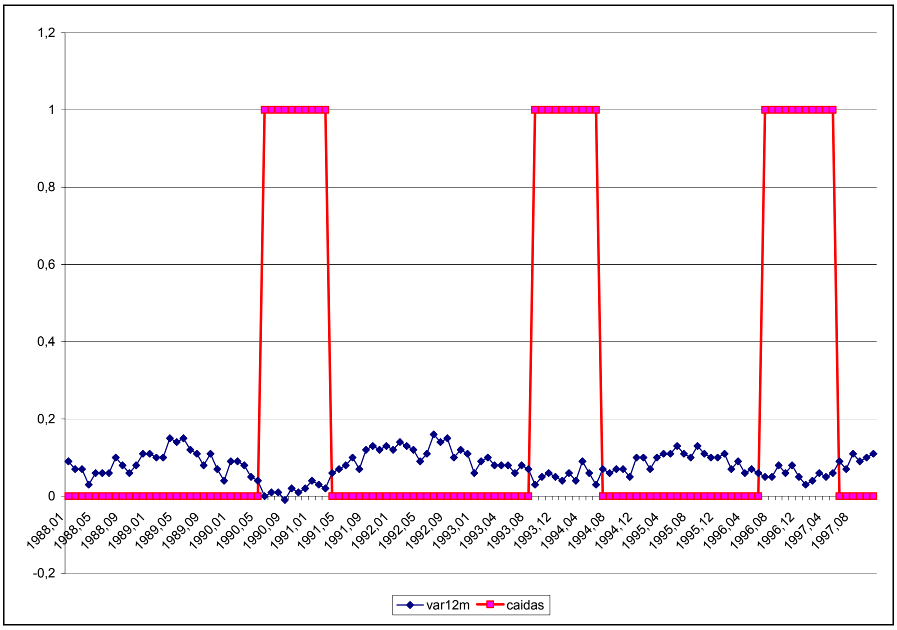
[17] Soria, K. y Zúñiga, S. (1999) "Estimando la Probabilidad de una Recesión en Chile". Revista Contabilidad, Auditoria e Impuestos, 173-180. Este trabajo se deriva del siguiente: Zúñiga, Sergio y Karla Soria (2000) "Mercados Financieros y Predicción del Producto: Evidencia Chilena 1989-1997". Estudios de Administración, Universidad de Chile. Volumen 7, Nº1, pp 67-92.

$$Prob(Yi|Xi) = F(Xi\beta) = F(\alpha+\beta Xi) = F(z) = \phi(z)$$

donde la variable dependiente Y toma el valor cero o uno (recesión o no), y Xi son las variables explicatorios, de este modo las predicciones del modelo se interpretan en nuestro caso como un estimado de la probabilidad de que se obtenga una recesión, Prob(Yi=1), dado los valores de las variables explicativas, tasa de interés y crecimiento del IGPA.

A pesar de que en los EEUU se acepta generalmente que una recesión ocurre cuando existen 2 trimestres (quarters) de crecimiento negativo, en nuestro caso, puesto que tenemos observaciones mensuales y solamente a partir de 1989, definiremos como recesiones las tres caídas del producto (var12m) mostradas en destacado en el Gráfico y ocurridas durante 1990:6 y 1991:3 la primera, durante 1993:10 y 1994:7 la segunda, y durante 1996:8 y 1997:6 la última.

VARIACIÓN DEL IMACEC (var12m) Y LAS RECESIONES EN CHILE
Datos mensuales desde 1989:05 a 1997:12



Una vez construida la serie para la variable dicotómica con "unos" en los meses en que hubo recesión (Yt=1) y "ceros" en los demás meses (Yt=0), procedemos a la estimación econométrica de los modelos a través de maximizar la función de verosimilitud para los parámetros desconocidos de la constante, y de las series.

Analizaremos dos especificaciones:

Modelo 1: Prob(Yi=1 | T1_3{6})

Modelo 2: Prob(Yi=1 | T1_3{6}, GRIGPA_18M{4})

Los resultados se muestran en la Tabla:

ESTIMACION POR PROBIT MODELOS 1 Y 2

Datos mensuales desde 1989:05 a 1997:12

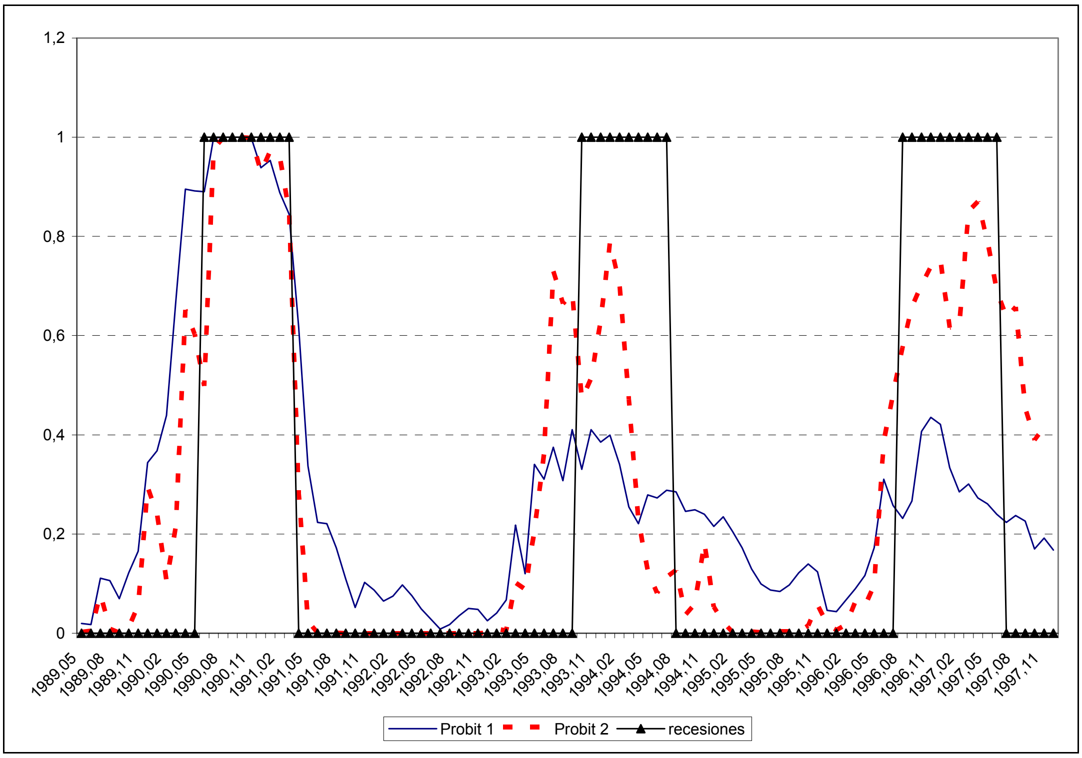
A1 fx Mes

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**Mes**	**var12m**	**caidas**	**t1_3**	**grigpa18**									
2	1988,01	0,08806818	0	0,0468	0,26330675									
3	1988,02	0,07114625	0	0,0504	0,29649419									
4	1988,03	0,06557377	0	0,0442	0,25325671									
5	1988,04	0,0270775	0	0,0415	0,20262895									
6	1988,05	0,06314797	0	0,0418	0,13525584									
7	1988,06	0,05644403	0	0,0473	0,12872622									
8	1988,07	0,05938697	0	0,0466	0,08356627									
9	1988,08	0,10341463	0	0,0526	0,09651885									
10	1988,09	0,08325171	0	0,0591	0,13449864									
11	1988,10	0,06318681	0	0,057	0,12279656									
12	1988,11	0,08485401	0	**0,0537**	0,1958359									
13	1988,12	0,11070448	0	0,0531	0,16501587									
14	1989,01	0,11314186	0	0,0628	0,15081756									
15	1989,02	0,10332103	0	0,0625	0,10376543									
16	1989,03	0,10121457	0	0,06	0,0754437				Modelo 1				Modelo 2	
17	1989,04	0,14818182	0	0,0634	0,22544598			XB	F(XB)	Verosimilitud		XB	F(XB)	Verosimilitud
18	1989,05	0,13829787	0	0,0655	0,31415751		***-7,0034552***	-2,05924434	0,01973542	-0,01993276		-2,83844162	0,00226672	-0,00226929
19	1989,06	0,14781834	0	0,0717	0,22517687		***92,070967***	-2,11448692	0,01723685	-0,01738713		-2,6118629	0,00450252	-0,00451268
20	1989,07	0,11573237	0	0,0724	0,14868903			-1,22139855	0,11096758	-0,11762157		-1,41926165	0,07791137	-0,08111394
21	1989,08	0,10786914	0	0,0744	0,08478295		***-7,5477039***	-1,24901984	0,10582891	-0,11185815		-2,3738945	0,00880079	-0,00883975
22	1989,09	0,08318264	0	0,0808	0,12317505		***104,97986***	-1,47919725	0,0695438	-0,07208028		-3,18228958	0,00073058	-0,00073085
23	1989,10	0,10938846	0	0,0897	0,24620791		***-6,1541658***	-1,16615597	0,1217757	-0,12985325		-2,27775647	0,01137055	-0,01143568
24	1989,11	0,07148865	0	0,0895	0,27957361			-0,97280694	0,16532463	-0,18071241		-1,58657989	0,05630391	-0,05795111
25	1989,12	0,04448105	0	0,0894	0,24021906			-0,40196694	0,34385418	-0,42137222		-0,54241613	0,29376593	-0,34780856
26	1990,01	0,09460516	0	0,1086	0,25786788			-0,33751727	0,3678635	-0,45864993		-0,70520157	0,2403424	-0,27488747
								.						
								.						
								.						
114	1997,05	0,05490926	1	0,0666	-0,04936137			-0,64135146	0,26064718	-1,34458758		0,80429646	0,78938711	-0,23649844
115	1997,06	0,05974395	1	0,0656	-0,06003996			-0,70580113	0,24015591	-1,42646695		0,50062334	0,69168188	-0,36862914
116	1997,07	0,08720652	0	0,0656	-0,0556181			-0,76104371	0,22331548	-0,25272103		0,34675984	0,63561412	-1,00954187
117	1997,08	0,07129187	0	0,0655	-0,07355211			-0,71500823	0,23730198	-0,2708931		0,40660437	0,65785071	-1,07250811
118	1997,09	0,1115	0	0,0656	-0,04271931			-0,75183662	0,22607466	-0,25627987		-0,11579321	0,45390822	-0,60496821
119	1997,10	0,08872793	0	0,0678	-0,11738379			-0,95439274	0,16994244	-0,18626023		-0,28103112	0,38934327	-0,49322029
120	1997,11	0,09521576	0	0,0677	-0,1199902			-0,87152887	0,19173272	-0,21286249		-0,21376208	0,4153663	-0,53676978
121	1997,12	0,10582255	0	0,0693	-0,15816227			-0,96359984	0,16762329	-0,18347017		-0,2083731	0,41746883	-0,54037258
122										-44,1651419				-30,4763231
123														

Todos los coeficientes poseen el signo apropiado, es decir, positivo para la tasa de interés (una alza de tasas genera una mayor probabilidad de recesión 6 meses después) y negativo para el IGPA (un mayor IGPA implica una menor probabilidad de recesión 4 meses después. Sin embargo recordamos que debido a que las relaciones son no-lineales, es difícil cuantificar la significancia cuantitativa de las asociaciones.

El Gráfico siguiente muestra la probabilidad estimada de una recesión derivada de los datos disponibles, en cuanto a las series de tasas de interés y de IGPA, y los coeficientes estimados en la Tabla anterior. Las columnas obscurecidas indican los periodos de recesión.

PROBABILIDAD PREDICHA DE UNA RECESION
BASADA EN LAS TASAS DE INTERES Y EL MERCADO ACCIONARIO
Datos mensuales desde 1989:05 a 1997:12



Nota: PROBIT 1 es la probabilidad derivada del modelo 1, y PROBIT 2 es aquella derivada del modelo 2.

La característica más importante de este gráfico es que claramente el modelo 2 (aquél que incluye la tasa de interés y el mercado accionario) predice en mejor forma la probabilidad de una recesión, comparado con el modelo 1 (aquél que incluye solamente la tasa de interés). Nótese que ambos modelos predicen claramente la primera recesión con probabilidad 1.0, sin embargo en la segunda y tercera recesiones, el modelo 2 muestra un mejor rendimiento, por cuanto las probabilidades se acercan en general más a uno y a cero, indicando mayor certeza en la predicción. Nótese también que ambos modelos se anticipan varios meses en predecir la segunda recesión que comenzó a mediados de 1993.

Como conclusión, mostramos que un modelo del tipo PROBIT, como el que hemos ajustado anteriormente puede ser más completo que los modelos lineales tradicionales de mínimos cuadrados ordinarios. Ambos proporcionan la misma información básica en cuanto al tipo de relación existente entre las variables y su signo, sin embargo el modelo PROBIT puede además predecir eficientemente la probabilidad de una recesión en Chile.

5.3.5. Bondad de Ajuste

En la literatura se han sugerido varias alternativas para medir la capacidad predictiva y la bondad del ajuste de este tipo de modelos. Diversos autores han propuesto medidas similares al coeficiente de determinación basadas en la función de verosimilitud.

Por tratarse de modelos no lineales, el R2 no tiene la interpretación usual. Los R cuadrados más usados se basan en likelihood ratios:

Maddala : $R^2 = 1 - \left(\frac{LR}{LUR} \right)^{\frac{2}{T}}$

Pseudos R2 McFadden (1974) : $R^2 = 1 - \left(\frac{Log(LR)}{Log(LUR)} \right)$

donde LUR es el máximo de la función de verosimilitud cuando se maximiza en función de los parámetros, y LR es el máximo cuando se hace con la restricción Betai =0, para i=1, 2,…K

Este coeficiente, al igual que el R^2 convencional en el análisis de regresión, toma valores comprendidos entre 0 y 1. Un valor de 0 implicaría que las variables xi no tienen poder explicativo sobre las probabilidades Pij. Los valores intermedios del pseudo-R^2 carecen de una interpretación simple.

5.3.6. Inferencia de los Coeficientes de Mc no Lineales

No es posible establecer las propiedades finitas para la gran mayoría de estos modelos no lineales. Recordemos que en el caso lineal, las propiedades MELI-MEI provenían del hecho que existía una relación lineal entre el estimador b y la serie dependiente Y, lo que ahora no ocurre. En conclusión, los estimadores ahora no son MELI-MEI.

Sin embargo es posible, bajo ciertas condiciones, encontrar las propiedades asintóticas de los estimadores no lineales, lo que permite mostrar que el estimador no lineal es consistente, y que además:

$$\sqrt{T(b-\beta)} \quad \approx \quad Normal\left[0, \sigma^2 \left\{ \lim \frac{X(\beta)' X(\beta)}{T} \right\}^{-1} \right]$$

lo que se traduce en que

$$b \approx Normal\left[\beta, \sigma^2 \{X(\beta)' X(\beta)\}^{-1}\right]$$

donde la matriz de varianzas y covarianzas viene dada por:

$$Var(\beta) = s^2 \{X(\beta)' X(\beta)\}^{-1}$$

siendo X(β) una matriz TxK de primeras derivadas evaluadas en b, y $s^2 = \frac{SCErr(b)}{T-K}$.

Los elementos de la diagonal de esta matriz son las varianzas estimadas para los componentes de b.

<u>Ejemplo</u>: Para el caso del ejemplo de la función Cobb-Douglas anterior, calculemos las varianzas estimadas de cada uno de los parámetros. Con esto es posible calcular los estadísticos t individuales y su respectiva significancia.

Sabemos que:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{\ln a^x} = \frac{d}{dx}e^{x \ln a} = (\ln a)e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$$

de modo que:

$$\begin{aligned}
&Y = \beta_0 \cdot L^{\beta_1} \cdot K^{\beta_2} \\
&\frac{\partial Y}{\partial \beta_0} = L^{\beta_1} \cdot K^{\beta_2} \\
&\frac{\partial Y}{\partial \beta_1} = (\beta_0 \cdot K^{\beta_2}) \cdot \ln(L) \cdot L^{\beta_1} \\
&\frac{\partial Y}{\partial \beta_2} = (\beta_0 \cdot L^{\beta_1}) \cdot \ln(K) \cdot K^{\beta_2}
\end{aligned}$$

La matriz resultante de evaluar las derivadas anteriores en los óptimos estimados para β0, β1 y β2 aparecen en X'(b0), X'(b1) y X'(b2) respectivamente.

Empresa	Trabajo	Capital	Producto	Error	Error 2		X ' (b0)	X ' (b1)	X ' (b2)
1	0,228	0,802	0,256918	-0,135732283	0,018423253	1,33034214	0,29514985	-0,58049797	-0,08663698
2	0,258	0,249	0,183599	-0,008664219	7,50687E-05	0,72288115	0,14452163	-0,26047738	-0,26730401
3	0,821	0,771	1,212883	0,248024491	0,061516148	0,68687921	0,72527095	-0,19030114	-0,25092777
4	0,767	0,511	0,522568	-0,169907586	0,028868588		0,52052443	-0,18369194	-0,4649182
5	0,495	0,758	0,847894	0,186368666	0,03473328		0,49725955	-0,46518297	-0,18329008
6	0,487	0,425	0,763379	0,324007376	0,10498078		0,33026964	-0,316124	-0,37595541
7	0,678	0,452	0,623130	0,040913867	0,001673944		0,43764391	-0,22625384	-0,46232217
8	0,748	0,817	1,031485	0,092807636	0,008613257		0,70559094	-0,27254713	-0,18972189
9	0,727	0,845	0,569948	-0,371136406	0,137742232		0,70740028	-0,30004481	-0,15849617
10	0,695	0,958	0,882497	-0,11047613	0,012204975		0,74640433	-0,36128675	-0,042606
11	0,458	0,084	0,108827	-0,029185748	0,000851808		0,1037423	-0,10777224	-0,34184909
12	0,981	0,021	0,026437	-0,065928195	0,004346527		0,06942965	-0,00177182	-0,35682825
13	0,002	0,295	0,003750	-0,002688142	7,22611E-06		0,00483946	-0,04001053	-0,00785955
14	0,429	0,277	0,461626	0,162864524	0,026524853		0,22457492	-0,25284135	-0,38353139
15	0,231	0,546	0,268474	-0,035904191	0,001289111		0,22879693	-0,4460168	-0,18419029
16	0,664	0,129	0,186747	-0,055631766	0,003094893		0,1821928	-0,09924759	-0,49637787
17	0,631	0,017	0,020671	-0,037397486	0,001398572		0,04364929	-0,0267376	-0,23660248
18	0,059	0,906	0,100159	-0,060530567	0,00366395		0,12078815	-0,45478648	-0,01586263
19	0,811	0,223	0,252334	-0,155572287	0,024202737		0,30661758	-0,08545116	-0,61209745
20	0,758	0,145	0,103312	-0,185715791	0,034490355		0,21725824	-0,08008148	-0,55811889
21	0,050	0,161	0,078945	0,035428048	0,001255147		0,0327111	-0,13036514	-0,07947723
22	0,823	0,006	0,005799	-0,028609503	0,000818504		0,0258644	-0,00670274	-0,17603376
23	0,483	0,836	0,723250	0,028129984	0,000791296		0,52251221	-0,50586569	-0,12451453
24	0,682	0,521	0,776468	0,131837389	0,017381097		0,48456002	-0,24671665	-0,42030253
25	0,116	0,930	0,216536	-0,05016783	0,002516811		0,20047762	-0,57452408	-0,01935488
26	0,440	0,495	0,541182	0,087812116	0,007710968		0,34079194	-0,37220786	-0,31880858
27	0,456	0,185	0,316320	0,079689371	0,006350396		0,17787201	-0,18581715	-0,39929039
28	0,342	0,092	0,123811	0,004860299	2,36225E-05		0,08941362	-0,12762751	-0,28381241
29	0,358	0,485	0,386354	0,001216036	1,47874E-06		0,28950294	-0,3956223	-0,27868829
30	0,162	0,934	0,279431	-0,061109316	0,003734349		0,2559795	-0,6198375	-0,0232517
					0,549285224				

Los cálculos para obtener X'X, su inversa, y finalmente la varianza de los coeficientes se muestra abajo:

x'x =

4,17238459	-2,78768338	-2,35522456
-2,78768338	3,0382883	1,59625312
-2,35522456	1,59625312	2,8734022

(x`x)-1 =

0,81646156	0,561362	0,35737234
0,561362	0,85075343	-0,01248842
0,35737234	-0,01248842	0,64788242

var(b) =

0,01661001	0,01142029	0,00727035
0,01142029	0,01730764	-0,00025406
0,00727035	-0,00025406	0,01318045

ds(b) =

0,12887983	0,10686576	0,08526632
0,10686576	0,13155851	#¡NUM!
0,08526632	#¡NUM!	0,11480616

La última matriz es la desviación estándar de los coeficientes (error estándar). Con esto, los estadísticos t de cada coeficiente son:

10,3223457
5,49475043
5,98294753

lo que implica que todos ellos son estadísticamente significativos (se rechaza la hipótesis nula de que cada coeficiente es cero) de un modo asintótico, es decir no exacto, como ocurre en los modelos lineales.

Nótese que a efectos de realizar inferencia en los modelos no lineales no se tiene procedimientos exactos, por cuanto los parámetros

- no están distribuidos normalmente
- No son insesgados
- No tienen mínima varianza.

En cambio deben usarse procedimientos de grandes muestras, lo que implica que en esos casos los estimadores de SCErr y de máxima verosimilitud para modelos no lineales con o sin errores normales son aproximadamente normalmente distribuidos, casi insesgados y casi de mínima varianza.

Respecto a las pruebas de hipótesis y los intervalos de confianza sobre los coeficientes, cuando las muestras son grandes pueden realizarse de la forma usual, aunque esos tests son aproximados (asintóticos), de modo que se debe ser conservador con la interpretación de los p-values.

5.4. LOGIT MULTINOMIAL

5.4.1. Introducción

Existen muchas variantes y generalizaciones a los modelos descritos anteriormente. El siguiente cuadro es ilustrativo al respecto.

Tipos de Modelos de Elección Discreta

<table>
<tr><th rowspan="2">Nº de alternativas</th><th rowspan="2">Tipo de alternativas</th><th rowspan="2">Tipo de función</th><th colspan="2">El regresor se refiere a:</th></tr>
<tr><th>Características
(de los individuos)</th><th>Atributos
(de las alternativas)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Modelos de respuesta dicotómica
(2 alternativas)</td><td rowspan="3">Complementarias</td><td>Lineal</td><td colspan="2">Modelo de Probabilidad Lineal Truncado</td></tr>
<tr><td>Logística</td><td colspan="2">Modelo Logit</td></tr>
<tr><td>Normal tipificada</td><td colspan="2">Modelo Probit</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Modelos de respuesta múltiple
(más de 2 alternativas)</td><td rowspan="2">No ordenadas</td><td>Logística</td><td>Logit Multinomial
- Logit Anidado
- Logit Mixto</td><td>Logit Codicional
- Logit Anidado
- Logit Mixto</td></tr>
<tr><td>Normal tipificada</td><td>Probit Multinomial
Probit Multivariante</td><td>Probit Condicional
Probit Multivariante</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ordenadas</td><td>Logística</td><td colspan="2">Logit Ordenado</td></tr>
<tr><td>Normal tipificada</td><td colspan="2">Probit Ordenado</td></tr>
</table>

En este apartado nos centraremos en el caso en que se tienen más de dos alternativas de respuesta, el cual es estimado aquí a través de un modelo Logit Multinomial.

El modelo logit multinomial se suele utilizar a la hora de caracterizar las probabilidades con que un individuo i, con un vector de características individuales xi, elige una de entre M alternativas. Definamos la variable Yi de forma que tome el valor 1 si el individuo escoge la primera opción, 2 si escoge la segunda y así sucesivamente.

La probabilidad de que el individuo i seleccione la alternativa j se modeliza como:

$$P_{ij} = \Pr(Y_i = j \mid x_i) = \frac{e^{x'_i \beta_j}}{\sum_{k=1}^{M} e^{x'_i \beta_k}}$$

Los parámetros Betas del modelo no están identificados. En efecto, si definimos $\alpha_j = \beta_j + q$, donde q es un vector arbitrario, la expresión (1) puede reescribirse como

$$P_{ij} = \frac{e^{x'_i \beta_j}}{\sum_{k=1}^{M} e^{x'_i \beta_k}} = \frac{e^{x'_i (\alpha_j + q)}}{\sum_{k=1}^{M} e^{x'_i (\alpha_k + q)}} = \frac{e^{x'_i \alpha_j}}{\sum_{k=1}^{M} e^{x'_i \alpha_k}}$$

Por tanto existen infinitos vectores de parámetros que generan exactamente las mismas probabilidades definidas anteriormente. Luego, es necesario adoptar algún tipo de normalización de los parámetros, siendo la más usual el igualar a 0 los parámetros asociados a una de las alternativas.

Por ejemplo si Beta1=0:

$$P_{ij} = \frac{e^{x'_i \beta_j}}{1 + \sum_{k=2}^{M} e^{x'_i \beta_k}} \quad j = 2, \ldots, M$$

$$P_{i1} = \frac{1}{1 + \sum_{k=2}^{M} e^{x'_i \beta_k}}$$

Una vez adoptada una normalización, el logaritmo de la función de verosimilitud para una muestra de N observaciones es:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} d_{ij} \ln P_{ij}$$

donde dij=1 si Yi=j y 0 en caso contrario.

El modelo logit multinomial es intrínsecamente no lineal y los parámetros no se corresponden con los efectos marginales de las variables explicativas sobre la probabilidad de elección de una determinada alternativa[18].

Un modelo Probit Multinomial (cuando hay tres o más elecciones posibles) no puede estimarse a través de los métodos anteriores debido a que se requiere una integral numérica. Sin embargo puede implementarse un modelo Logit Multinomial usando una secuencia de instrucciones del tipo =SI( ) en Excel, como veremos en el siguiente ejemplo.

[18] Una discusión más detallada sobre los efectos marginales en los modelos de elección discreta puede encontrase en el libro de Greene (1999).

5.4.2. Ejemplo

En base a información histórica se ha clasificado la capacidad de pago (Y) de los clientes de una casa comercial. Los grupos resultantes son los siguientes:

0=baja capacidad de pago (F1)
1=media capacidad de pago (F2)
2=alta capacidad de pago

La capacidad de pago (Y) de los clientes es explicada por su nivel de endeudamiento (X).

El modelo Logit Multinomial para el caso de una situación de 3 opciones viene dado por:

$$P(Y=0)=\frac{1}{1+e^{f1}+e^{f2}} \qquad P(Y=1)=\frac{e^{f1}}{1+e^{f1}+e^{f2}} \qquad P(Y=2)=\frac{e^{f2}}{1+e^{f1}+e^{f2}}$$

donde las funciones f1 y f2 tienen, en nuestro caso, la siguiente forma:

$$f_1=\beta_{11}+\beta_{12}\cdot \text{Endeudamiento}$$
$$f_2=\beta_{21}+\beta_{22}\cdot \text{Endeudamiento}$$

De este modo la función de verosimilitud, cuya suma debe maximizarse, tomará el valor de la siguiente función:

$$MLGT=\left\{\begin{array}{l} f_1=\beta_{11}+\beta_{12}\cdot \text{Endeudamiento} \quad \text{si} \quad \text{Y}=1 \\ f_2=\beta_{21}+\beta_{22}\cdot \text{Endeudamiento} \quad \text{si} \quad \text{Y}=2 \\ 0 \quad \text{si} \quad \text{Y}=0 \end{array}\right\}-Ln\left(1+\exp(f_1)+\exp(f_2)\right)$$

Los resultados de la estimación en Excel se muestran en el siguiente cuadro, donde puesto que los signos de ambas ecuaciones de pendiente son negativos, se concluye que al aumentar el nivel de endeudamiento, aumenta la probabilidad de ser clasificado en los grupos 0 y 1, es decir de baja capacidad de pago y de media capacidad de pago.

H3 =SI(B3=2;G3;SI(B3=1;F3;0))-LN(1+EXP(F3)+EXP(G3))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	id	Historia_pago	Endeudamiento			XB(1)	XB(2)	multilgt
2	1	0	5,7	**b11**	2,3340	-1,4498	-2,2070	-0,2961
3	2	2	4,0	**b12**	-0,6638	-0,3213	0,2223	-0,8676
4	3	2	2,1	**b21**	5,9383	0,9400	2,9374	-0,1728
5	4	2	2,2	**b22**	-1,4290	0,8736	2,7945	-0,1887
6	5	2	4,5			-0,6532	-0,4922	-1,2491
7	6	1	3,2			0,2098	1,3655	-1,6069
8	7	1	3,6			-0,0558	0,7939	-1,4808
9	8	2	2,2			0,8736	2,7945	-0,1887
10	9	2	2,8			0,4753	1,9371	-0,3191
11	10	2	2,4			0,7408	2,5087	-0,2248
12	11	1	3,0			0,3425	1,6513	-1,6886
13	12	2	2,8			0,4753	1,9371	-0,3191
14	13	1	2,8			0,4753	1,9371	-1,7809
15	14	0	3,5			0,0106	0,9368	-1,5179
16	15	0	2,7			0,5417	2,0800	-2,3724
17	16	2	4,1			-0,3877	0,0794	-0,9363
18	17	1	4,6			-0,7196	-0,6351	-1,4211
19	18	0	10,4			-4,5697	-8,9232	-0,0104
20	19	0	4,2			-0,4541	-0,0635	-0,9453
21	20	2	2,6			0,6081	2,2229	-0,2679
22	21	2	3,9			-0,2549	0,3652	-0,8029
23	22	2	2,2			0,8736	2,7945	-0,1887
24	23	2	2,4			0,7408	2,5087	-0,2248
25	24	2	1,7			1,2055	3,5090	-0,1221
26	25	2	2,1			0,9400	2,9374	-0,1728
27	26	0	3,1			0,2761	1,5084	-1,9224
28	27	0	6,0			-1,6489	-2,6356	-0,2342
29	28	2	3,3			0,1434	1,2226	-0,4912
30	29	0	13,5			-6,6276	-13,3530	-0,0013
31	30	2	3,1			0,2761	1,5084	-0,4140
32								-22,4290

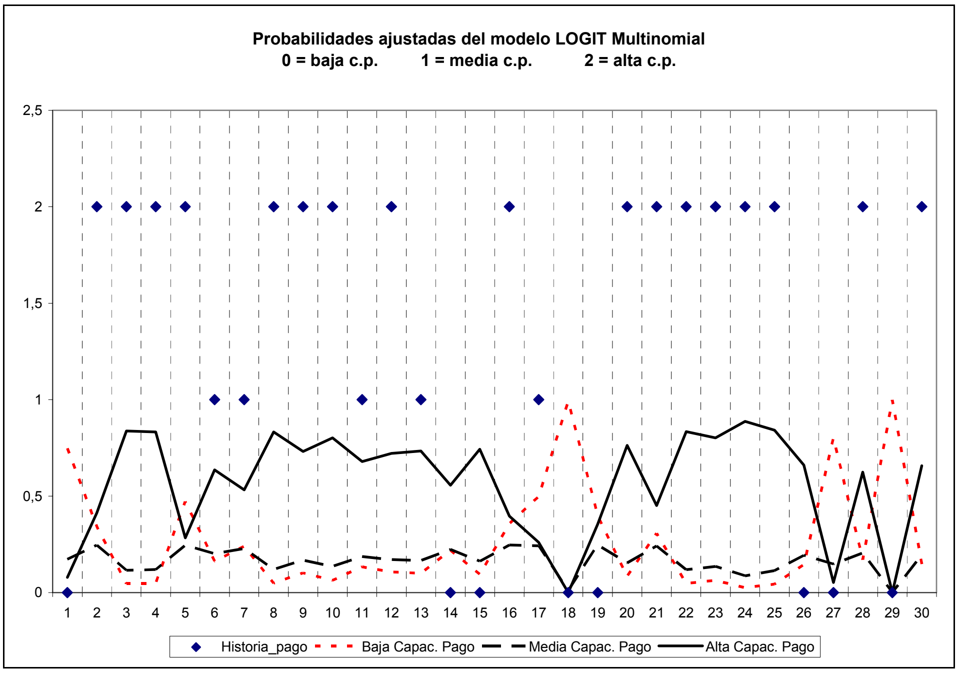
Para construir las probabilidades ajustadas del modelo, usamos los coeficientes de las funciones f1 y f2 en usando los valores de los coeficientes estimados anteriormente, y luego reemplazando estas funciones, se tiene que:

J2 =EXP(F2)/(1+EXP(F2)+EXP(G2))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	id	Historia_pago	Endeudamiento			XB(1)	XB(2)	multilgt	P(Y=0)	P(Y=1)	P(Y=2)	
2	1	0	5,7	**b11**	2,3340	-1,4498	-2,2070	-0,2961	0,7437	0,1745	0,0818	1,0000
3	2	2	4,0	**b12**	-0,6638	-0,3213	0,2223	-0,8676	0,3362	0,2438	0,4199	1,0000
4	3	2	2,1	**b21**	5,9383	0,9400	2,9374	-0,1728	0,0446	0,1141	0,8413	1,0000
5	4	2	2,2	**b22**	-1,4290	0,8736	2,7945	-0,1887	0,0506	0,1213	0,8281	1,0000
6	5	2	4,5			-0,6532	-0,4922	-1,2491	0,4691	0,2441	0,2868	1,0000
7	6	1	3,2			0,2098	1,3655	-1,6069	0,1626	0,2005	0,6369	1,0000
8	7	1	3,6			-0,0558	0,7939	-1,4808	0,2405	0,2275	0,5320	1,0000
9	8	2	2,2			0,8736	2,7945	-0,1887	0,0506	0,1213	0,8281	1,0000
10	9	2	2,8			0,4753	1,9371	-0,3191	0,1047	0,1685	0,7268	1,0000
11	10	2	2,4			0,7408	2,5087	-0,2248	0,0650	0,1363	0,7987	1,0000
12	11	1	3,0			0,3425	1,6513	-1,6886	0,1312	0,1848	0,6840	1,0000
13	12	2	2,8			0,4753	1,9371	-0,3191	0,1047	0,1685	0,7268	1,0000
14	13	1	2,8			0,4753	1,9371	-1,7809	0,1047	0,1685	0,7268	1,0000
15	14	0	3,5			0,0106	0,9368	-1,5179	0,2192	0,2215	0,5593	1,0000
16	15	0	2,7			0,5417	2,0800	-2,3724	0,0933	0,1603	0,7465	1,0000
17	16	2	4,1			-0,3877	0,0794	-0,9363	0,3621	0,2458	0,3921	1,0000
18	17	1	4,6			-0,7196	-0,6351	-1,4211	0,4958	0,2414	0,2627	1,0000
19	18	0	10,4			-4,5697	-8,9232	-0,0104	0,9896	0,0103	0,0001	1,0000
20	19	0	4,2			-0,4541	-0,0635	-0,9453	0,3886	0,2468	0,3647	1,0000
21	20	2	2,6			0,6081	2,2229	-0,2679	0,0828	0,1522	0,7650	1,0000
22	21	2	3,9			-0,2549	0,3652	-0,8029	0,3110	0,2410	0,4480	1,0000
23	22	2	2,2			0,8736	2,7945	-0,1887	0,0506	0,1213	0,8281	1,0000
24	23	2	2,4			0,7408	2,5087	-0,2248	0,0650	0,1363	0,7987	1,0000
25	24	2	1,7			1,2055	3,5090	-0,1221	0,0265	0,0884	0,8851	1,0000
26	25	2	2,1			0,9400	2,9374	-0,1728	0,0446	0,1141	0,8413	1,0000
27	26	0	3,1			0,2761	1,5084	-1,9224	0,1463	0,1928	0,6610	1,0000
28	27	0	6,0			-1,6489	-2,6356	-0,2342	0,7912	0,1521	0,0567	1,0000
29	28	2	3,3			0,1434	1,2226	-0,4912	0,1802	0,2080	0,6119	1,0000
30	29	0	13,5			-6,6276	-13,3530	-0,0013	0,9987	0,0013	0,0000	1,0000
31	30	2	3,1			0,2761	1,5084	-0,4140	0,1463	0,1928	0,6610	1,0000

donde las columnas I, J y K contienen las probabilidades de que una persona caiga en cada estado de Y=0, Y=1 ó Y=2. Nótese que ambas probabilidades suman 1,0 (columna L).

El gráfico con las probabilidades estimadas se muestra a continuación.



El gráfico muestra que en efecto, el modelo logra predecir de un modo satisfactorio la capacidad de pago de los clientes de la empresa.

Referencias

Albright, S. Christian, Wayne L. Winston, Practical Management Science: Spreadsheet Modeling and Applications, 2nd edition

Anderson y Otros. "Introducción a los Modelos Cuantitativos para Administración". Grupo Ed. Iberoamérica, 1993. 685.4033/A23.

Bierman, Bonini y Hausman. "Análisis Cuantitativo para la Toma de Decisiones". Octava ed. Addison Wesley Iberoamericana, 1994. 658.0151/B478

Chiang, Alpha. Métodos Fundamentales de Economía Matemática. 1987, Prentice Hall,

Davis R. y Mc Keon, P. "Modelos Cuantitativos para Administración". Grupo ed. Iberoamericana, 1986.

Eppen, Gd , Gould, Fj y Schmidt, 2000. Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa. 5º edicion, Prentice Hall Hispanoamericana.

Greene, W. H. (1999): Análisis Econométrico. Prentice Hall, 3ª ed.

Gallagher y Watson. "Métodos Cuantitativos para la Toma de Decisiones". Mc Graw Hill. 1994.

Hillier y Lieberman, G. "Introducción a la Investigación de Operaciones". Ed. Mc Graw Hill, 1990.

Intrilligator Michael. "Mathematical Operation and Economic Theory". Prentice Hall, 1993.

Judge, Carter Hill, Griffiths, Lutkepohl y Lee (1988). Introduction to the Theory and Practice of Econometrics. 2º ed. Wiley.

Luenberger, David. "Programación Lineal y no Lineal" Addison Wesley. 1989.

McFadden, D. (1974), “Conditional Logit Análisis of Qualitative Choice Models”, Frontiers in Econometrics, Academic Press, Nueva York

Maddala, G. S. 1983. Limited-dependent and qualitative variables in Econometrics. Cambridge: Cambridge University Press.

Soria, K. y Zúñiga, S. (1999) "Estimando la Probabilidad de una Recesión en Chile". Revista Contabilidad, Auditoria e Impuestos, 173-180.

Soria, K. y Zúñiga, S. (1998) "Análisis de Rentabilidad Operacional en el Cultivo de Abalón, Haliotis Discus Hannai". Ciencia y Tecnología del Mar, 21:97-108.

Taha, H.A. Investigación de Operaciones: una introducción. 1998, sexta edición. Editorial Prentice-Hall.

Zúñiga, Sergio "Modelos de Tasas de Interés en Chile: Una Revisión". (1999). CUADERNOS DE ECONOMÍA (Latin American Journal of Economics): Revista del Instituto de Economía de la Pontificia Universidad Católica de Chile, Año 36, Nº108: 875-893.

Zúñiga (2001) "Efectos Estacionales y Relación Volumen-Rendimiento en los Pagarés Reajustables del Banco Central". Economía Chilena, Banco Central de Chile. Vol. 4 Nº1, abril, pp. 5-24.

Zúñiga, Sergio y Karla Soria (2000) "Mercados Financieros y Predicción del Producto: Evidencia Chilena 1989-1997". Estudios de Administración, Universidad de Chile. Volumen 7, Nº1, pp 67-92.

Zúñiga, Sergio (2000). Econometría Práctica con RATS. Documentos Docentes, UCN - Coquimbo.